

復習問題

以下の不定積分を求めよ。

1.

$$\int \log(4+x) dx$$

2.

$$\int \cos 3x \sin 2x dx$$

3.

$$\int x \cos 3x dx$$

4.

$$\int x^2 \sin 2x dx$$

5.

$$\int e^x \cos 3x dx$$

6.

$$\int e^{2x} \sin 3x dx$$

7.

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx$$

8.

$$\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$$

9.

$$\int \frac{1}{x^2 + 9} dx$$

10.

$$\int \frac{1}{x^4 - 16} dx$$

復習問題

1.

$$\int \log(4+x) dx$$

$$\log(4+x) = (4+x)' \log(4+x) \text{ とみなして}$$

$$= (4+x) \log(4+x) - \int (4+x) \{\log(4+x)\}' dx$$

$$= (4+x) \log(4+x) - \int (4+x) \frac{1}{4+x} dx$$

$$= (4+x) \log(4+x) - x + C$$

Cは積分定数とする。

1

2.

$$\int \cos 3x \sin 2x dx$$

三角関数の積は和の公式を利用する。

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

$$= \frac{1}{2} \int [\sin(3+2)x + \sin(2-3)x] dx = \frac{1}{2} \int [\sin 5x - \sin x] dx$$

$$= -\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + C$$

Cは積分定数とする。

3.

$$\int x \cos 3x dx = \int x \left(\frac{\sin 3x}{3} \right)' dx$$

$$= \frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x dx$$

$$= \frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{9} \cos 3x + C$$

(Cは積分定数とする)

4.

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin 2x dx &= \int x^2 \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right)' dx \\
&= -\frac{x^2}{2} \cos 2x + \int x \cos 2x dx \\
&= -\frac{x^2}{2} \cos 2x + \int x \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)' dx \\
&= -\frac{x^2}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \\
&= -\frac{x^2}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C
\end{aligned}$$

ただし、Cは積分定数とする。

5.

$$\begin{aligned}
\frac{10}{9} \int e^x \cos 3x dx &= \frac{e^x}{9} (\cos 3x + 3 \sin 3x) \text{より} \\
\int e^x \cos 3x dx &= \frac{e^x}{10} (\cos 3x + 3 \sin 3x) + C
\end{aligned}$$

ただし、Cは積分定数とする。

6.

$$\begin{aligned}
2 \int e^{2x} \sin 2x dx &= \frac{e^{2x}}{2} (\sin 2x + \cos 2x) \text{より} \\
\int e^{2x} \sin 2x dx &= \frac{e^{2x}}{4} (\sin 2x + \cos 2x) + C
\end{aligned}$$

ただし、Cは積分定数とする。

復習問題

7.

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} + C$$

Cは積分定数とする。

8.

$$\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$$

$$x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1) \text{ より}$$

まず、

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} \text{ となる定数 } a, b \text{ を求めると}$$

両辺を $(x+1)(x+2)$ 倍して

$$x = a(x+2) + b(x+1)$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \quad a = 1, \quad b = -1$$

よって

$$\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = \int \left\{ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right\} dx = \log|x+1| - \log|x+2| + C$$

Cは積分定数とする。

復習問題

9.

$$\int \frac{1}{x^2+9} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+9} dx \quad -\textcircled{1}$$

$x = 3 \tan \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{3}{\cos^2 \theta} d\theta$$

として①の dx に代入すると

$$\int \frac{1}{x^2+9} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{(\tan^2 \theta + 1)} \frac{3}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{1}{3} \int 1 d\theta = \frac{\theta}{3} + C$$

ただし、 C は積分定数とする。

$\theta = \tan^{-1} \frac{x}{3}$ を代入して

$$\int \frac{1}{x^2+9} dx = \frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) + C$$

となる。

復習問題

10.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4 - 16} dx &= \int \frac{1}{(x^2 + 4)(x^2 - 4)} dx = \frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x^2 + 4} \right) dx \\ &= \frac{1}{8} \int \left\{ \frac{1}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x^2 + 4} \right\} dx = \frac{1}{32} \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx - \frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{x^2 + 4} \right) dx \\ &= \frac{1}{32} \log|x-2| - \frac{1}{32} \log|x+2| - \frac{1}{16} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C \\ &= \frac{1}{32} \log \left| \frac{x-2}{x+2} \right| - \frac{1}{16} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C\end{aligned}$$

Cは積分定数とする。