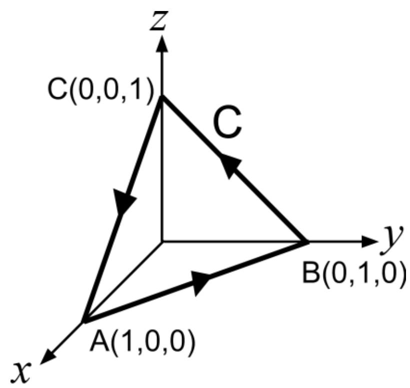
問題１

3 点 A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)を頂点とする三角形の周を C とするとき、$\vec{\mathbf{F}} = z^2\,\vec{\mathbf{i}} + x^2\,\vec{\mathbf{j}} + y^2\,\vec{\mathbf{k}}$ に対して、$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ を求めよ。

(1)　直接、線積分で求める。

(2)　ストークスの定理を用いる。



問題２

$\vec{\mathbf{F}} = 4x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}$ とし、S を $2x + 3y + 6z = 12$ の平面のうち、$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ の領域に含まれている部分とするとき、$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ を求めよ。ただし、法線ベクトル方向は原点を離れる方向に向いているものとする。

(1)　直接的な解法（面積分）で $\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ を求める。

(2)　ガウスの発散定理を用いて、$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ を求める。

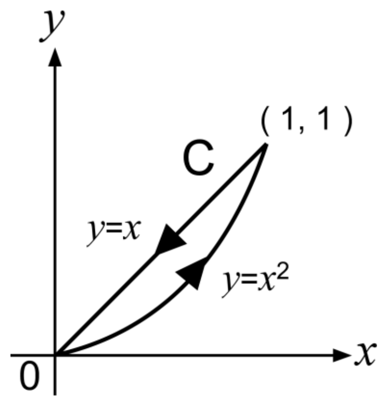
問題３

C が $y = x,\quad y = x^2$ によって囲まれた閉曲線であるとき、

$\oint_C \left(xy + y^2\right) dx + x^2\, dy$ を求めよ。

(a) 直接的に求める場合。

(b) 平面におけるグリーンの定理を使用する場合。



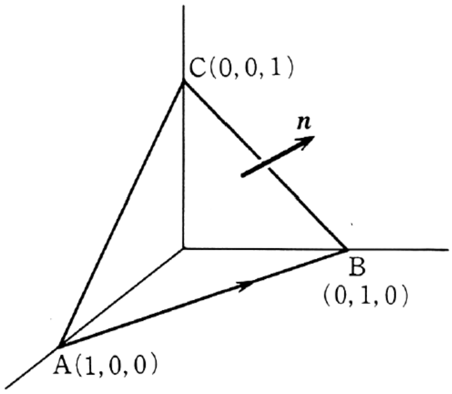
問題１

(1)

三角形の周は $AB+BC+CA$ で

AB：$(1-t,t,0)$,　$0\le t\le 1$，　BC：$(0,1-t,t)$,　$0\le t\le 1$　CA：$(t,0,1-t)$,　$0\le t\le 1$

である。



$$\oint_C \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{r}} = \oint_C z^2dz + x^2dy + y^2dz$$

$$\int_{AB} z^2dx + x^2dy + y^2dz = \int_0^1 (1-t)^2\,dt$$

$$\int_{BC} z^2dx + x^2dy + y^2dz = \int_0^1 (1-t)^2\,dt$$

$$\int_{CA} z^2dx + x^2dy + y^2dz = \int_0^1 (1-t)^2\,dt$$

ゆえに

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{r}} = 3\int_0^1 (1-t)^2\,dt = 1$$

(2)

$$S:\quad r(u,v) = u\,\vec{\mathbf{i}} + v\,\vec{\mathbf{j}} + (1-u-v)\vec{\mathbf{k}}$$

$$\left((u,v)\in D = \left\{ (u,v) \,\middle|\, \begin{array}{c} u+v\le 1 \\ u\ge 0,\quad v\ge 0 \end{array} \right\} \right)$$

である。

まず、$\mathrm{rot}\vec{\mathbf{F}}$ を求める。

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ y^2 & z^2 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ z^2 & x^2 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{k}}$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial y}(y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2) \right\} \vec{\mathbf{i}} + \left\{ \frac{\partial}{\partial z}(z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(y^2) \right\} \vec{\mathbf{j}} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(z^2) \right\} \vec{\mathbf{k}}$$

$$= (2y - 0)\,\vec{\mathbf{i}} + (2z - 0)\,\vec{\mathbf{j}} + (2x - 0)\,\vec{\mathbf{k}} = 2y\vec{\mathbf{i}} + 2z\vec{\mathbf{j}} + 2x\vec{\mathbf{k}}$$

つぎに

$\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{r}}_v = \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$ より

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \iint_S \left(rot\vec{\mathbf{F}} \right) \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iint_D \left(2v\,\vec{\mathbf{i}} + 2(1 - u - v)\,\vec{\mathbf{j}} + 2u\,\vec{\mathbf{k}} \right) \cdot \left(\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}} \right) dudv$$

$$= \iint_D \left(2v + 2 - 2u - 2v + 2u \right) dudv$$

$$= \iint_D (2)\, dudv$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-v} 2du \right] dv$$

$$= \int_0^1 (2 - 2v) dv$$

$$= \left[2v - v^2 \right]_0^1 = 1$$

となる。

問題２

(1)

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_S \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\, dS = \iint_R \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\,\frac{dx\,dy}{\left\|\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{k}}\right\|}$$

を考える。
まず、曲線 S と直交する単位法線ベクトル $\vec{\mathbf{n}}$ を求めるには、曲面 $2x+3y+6z=12$ と直交するベクトルが、$\nabla(2x+3y+6z)=2\vec{\mathbf{i}}+3\vec{\mathbf{j}}+6\vec{\mathbf{k}}$ によって与えられる。よって、曲面 S 上にある任意の点に対する単位法線ベクトル $\vec{\mathbf{n}}$ は次式によって与えられる。

$$n=\frac{2\vec{\mathbf{i}}+3\vec{\mathbf{j}}+6\vec{\mathbf{k}}}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{2}{7}\vec{\mathbf{i}}+\frac{3}{7}\vec{\mathbf{j}}+\frac{6}{7}\vec{\mathbf{k}}$$

よって、$\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{k}}=\left(\frac{2}{7}\vec{\mathbf{i}}+\frac{3}{7}\vec{\mathbf{j}}+\frac{6}{7}\vec{\mathbf{k}}\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}=\frac{6}{7}$

$$\frac{dx\,dy}{\left\|\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{k}}\right\|}=\frac{7}{6}dxdy$$

次に、$\vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{n}}=\left(4x\vec{\mathbf{i}}+y\vec{\mathbf{j}}+z\vec{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(\frac{2}{7}\vec{\mathbf{i}}+\frac{3}{7}\vec{\mathbf{j}}+\frac{6}{7}\vec{\mathbf{k}}\right)=\frac{8x+3y+6z}{7}=\frac{12+6x}{7}$

（∵ 曲面 S の方程式から $z=\frac{12-2x-3y}{6}$）

よって

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\, dS = \iint_R \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\,\frac{dx\,dy}{\left\|\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{k}}\right\|} = \iint_R\left(\frac{12+6x}{7}\right)\frac{7}{6}dxdy$$
$$=\iint_R(2+x)dxdy$$

xy 平面上の領域 R の上でこの二重積分を計算するには、x を固定して y について 0 から $y=\frac{12-2x}{3}$ まで積分し、続いて、x について、x=0 から x=6 まで積分する。

$$\int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{(12-2x)/3}(2+x)dydx=\int_{x=0}^{6}\left(8+\frac{8x}{3}-\frac{2x^2}{3}\right)dx=48$$

(2)

ガウスの発散定理

$$\iiint_V div\,\vec{\mathbf{F}}\,dV = \iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

を用いると

$$\iiint_V div\vec{\mathbf{F}}dV = \iiint_V (4+1+1)dV = \iiint_V 6\,dV = 6\iiint_V dV = 6\times(\text{三角錐の体積}) = 6\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\right)\cdot 2 = 48$$

問題３

$y=x$ と $y=x^2$ とは 2 点 $(0,0)$と$(1,1)$で交わる。C 曲面の上を働くときの正方向は図に示された通りである。

(1)

曲線 C_1： $y=x^2$ に沿って、問題の線積分は

$$\oint_{C_1}\left(xy+y^2\right)dx+x^2\,dy$$
$$=\int_0^1\left((x)\left(x^2\right)+x^4\right)dx+\left(x^2\right)(2x)dx$$
$$=\int_0^1\left(3x^3+x^4\right)dx=\frac{19}{20}$$

また、点(1,1)から点(0,0)まで直線 C_2： $y=x$ に沿って

$$\oint_{C_2}\left(xy+y^2\right)dx+x^2\,dy$$
$$=\int_1^0\left((x)(x)+x^2\right)dx+\left(x^2\right)dx=\int_1^0\left(3x^2\right)dx=-1$$

よって、求めるべき線積分は

$$\oint_{C}\left(xy+y^2\right)dx+x^2\,dy=\oint_{C_1}\left(xy+y^2\right)dx+x^2\,dy+\oint_{C_{21}}\left(xy+y^2\right)dx+x^2\,dy$$
$$=\frac{19}{20}-1=-\frac{1}{20}$$

(2)

重積分 $\iint_R\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy$ は次のような形に変形される。

$$\iint_R\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_R\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(xy+y^2\right)\right]dx\,dy$$
$$=\iint_R(x-2y)dxdy=\int_{x=0}^1\int_{y=x^2}^x(x-2y)dydx=\int_{x=0}^1\left[\int_{y=x^2}^x(x-2y)dy\right]dx$$
$$=\int_{x=0}^1\left[\left(xy-y^2\right)\Big|_{x^2}^{x}\right]dx=\int_0^1\left(x^4-x^3\right)dx=-\frac{1}{20}$$

1 月 26 日　HomeWork