問題1

ストークスの定理を用いて、ベクトル場

$$\vec{\mathbf{X}} = z\vec{\mathbf{i}} + 2x\vec{\mathbf{j}} + 3y\vec{\mathbf{k}}$$

の線積分 $\oint_C \vec{\mathbf{X}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ を求めよ。C は球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と平面 $x + y + z = 1$ の交線であり、

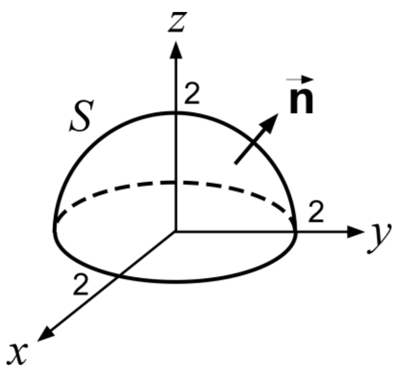
原点から見て時計回りに沿って積分するものとする。

問題2

V を S： $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ の xy 平面より上の半球とするとき、

$\vec{\mathbf{F}} = 4x\vec{\mathbf{i}} + 4y\vec{\mathbf{j}} - 2z\vec{\mathbf{k}}$ に対し、ガウスの発散定理を用いて

$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ を求めよ。



問題3

平面に関するグリーンの定理を用いて、曲線 C： $x^2 + y^2 = 4$ に関して

$$I = \oint_C (2x + 3y)dx + (x - y)dy$$

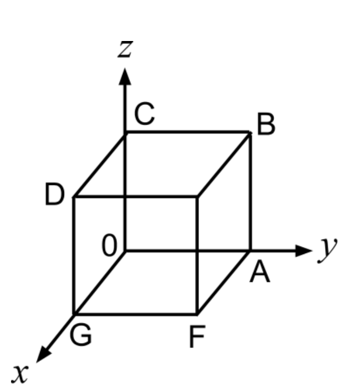
を求めよ。

問題4

$\vec{\mathbf{F}} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$ のとき、$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS$ を

ガウスの発散定理を用いて求めよ。

ここで、S は $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 0,\ z = 1$ に囲まれた立方体とする。



問題1

S を平面 $x+y+z=1$ の $x^2+y^2+z^2\le 1$ の部分とする。

$$\mathrm{S}:\ \vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}(u,v)=u\vec{\mathbf{i}}+v\vec{\mathbf{j}}+(1-u-v)\vec{\mathbf{k}}、\quad u^2+v^2+(1-u-v)^2\le 1$$

と書けるので、

$$\vec{\mathbf{r}}_u\times\vec{\mathbf{r}}_v=\vec{\mathbf{i}}+\vec{\mathbf{j}}+\vec{\mathbf{k}}\quad \text{したがって}\quad \vec{\mathbf{n}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{\mathbf{i}}+\vec{\mathbf{j}}+\vec{\mathbf{k}}\right)$$

$\mathrm{rot}\vec{\mathbf{X}}=3\vec{\mathbf{i}}+\vec{\mathbf{j}}+2\vec{\mathbf{k}}$ なので、ストークスの定理より

$$\oint_C \vec{\mathbf{X}}\cdot d\vec{\mathbf{r}}=\int_S\left(\mathrm{rot}\vec{\mathbf{X}}\right)\cdot\vec{\mathbf{n}}\,dS=\frac{6}{\sqrt{3}}\int_s dS=\frac{6}{\sqrt{3}}\times\left(S\,\text{の面積}\right)$$

S は半径 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ の円板なので、S の面積は $\frac{2}{3}\pi$　ゆえに

$$\oint_C \vec{\mathbf{X}}\cdot d\vec{\mathbf{r}}=\frac{4}{\sqrt{3}}\pi$$

となる。

問題2

ガウスの発散定理

$$\iiint_V div\,\vec{\mathbf{F}}\,dV=\iint_S\vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

を用いると

$$\iiint_V div\vec{\mathbf{F}}dV=\iiint_V(4+4-2)dV=\iiint_V 6\,dV=6\cdot\left(V\,\text{の体積}\right)$$

V の体積は、半径 2 の半球の体積なので $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi(2)^3=\frac{16}{3}\pi$ より

$$\iiint_V div\vec{\mathbf{F}}dV=6\cdot\frac{16}{3}\pi=32\pi$$

となる。

問題3

曲線 C で囲まれた領域 D とし、平面によるグリーンの定理を用いると

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_C (2x+3y)dx + (x-y)dy \\
&= \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(x-y) - \frac{\partial}{\partial y}(2x+3y) \right\} dxdy \\
&= \iint_D (1-3)dxdy \\
&= -2\iint_D dxdy = -2(D\text{の面積})
\end{aligned}
$$

となり、曲線 C： $x^2+y^2=4$ で囲まれた領域 D の面積は 4π

ゆえに

$$I = -8\pi$$

となる。

問題4

ガウスの発散定理は、

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{\mathbf{F}}\, dV$$

である。この発散定理を用いることで、求められる積分は次のように解くことができる。

$$
\begin{aligned}
&\iiint_V \nabla \cdot \vec{\mathbf{F}}\, dV = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) \right] dV \\
&= \iiint_V (3)\, dV = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1} (3) dzdydx \\
&= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} 3z\Big|_{z=0}^{1} dydx = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} (3y) dydx = 3
\end{aligned}
$$