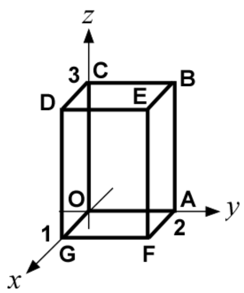
第 12 回 応用数学 I 演習 復習課題

問題 1.

$\vec{\mathbf{F}} = 2x^2\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + 3z\,\vec{\mathbf{k}}$ のとき、$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS$ を求めよ。

ここで、S は $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 2,\ z = 0,\ z = 3$ に囲まれた直方体の表面とする。



問題 2.

$\vec{\mathbf{F}} = 5x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}$ とし、S を $x + 2y + 4z = 8$ の平面のうち、$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ の領域に含まれている部分とするとき、$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ を求めよ。ただし、法線ベクトル方向は原点を離れる方向に向いているものとする。

問題 3

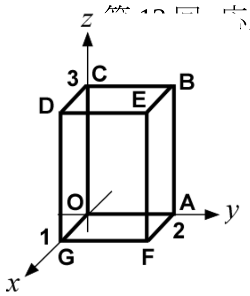
$\vec{\mathbf{F}} = 4x\vec{\mathbf{i}} + 4y\vec{\mathbf{j}} - 2z\vec{\mathbf{k}}$ とし、S を $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ の xy 平面より上の半球面とするとき、

$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ を求めよ。ただし、法線ベクトル方向は原点を離れる方向に向いているものとする。

問題 4

V を柱面 $x^2 + y^2 = 1$ と 2 平面 $z = 0,\ z = 1$ で囲まれた領域とし、S を V の境界面とする。

$\vec{\mathbf{X}} = x^3\vec{\mathbf{i}} + yz\vec{\mathbf{j}} + xz^2\vec{\mathbf{k}}$ としたとき $\oiint_S \vec{\mathbf{X}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS$ を求めよ。



問題 1.

$\vec{\mathbf{F}} = 2x^2\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + 3z\,\vec{\mathbf{k}}$ のとき、$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\,dS$ を求めよ。

ここで、S は $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=2,\ z=0,\ z=3$ に囲まれた直方体の表面とする。

この立方体の 6 面(面 DEFG, 面 ABCO, 面 ABEF, 面 OGDC, 面 BCDE, 面 AFGO)を面積分によって計算する。

面 DEFG は $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{i}}$，$x = 1$ であるので、

$$\iint_{DEFG} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\,ds = \int_0^3\!\!\int_0^2 \left(2\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + 3z\,\vec{\mathbf{k}}\right) \cdot \vec{\mathbf{i}}\,dydz = \int_0^3\!\!\int_0^2 2\,dydz = 12$$

面 ABCO は $\vec{\mathbf{n}} = -\vec{\mathbf{i}}$，$x = 0$ であるので、

$$\iint_{ABCO} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\,ds = \int_0^3\!\!\int_0^2 \left(y\,\vec{\mathbf{j}} + 3z\,\vec{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(-\,\vec{\mathbf{i}}\right) dydz = 0$$

面 ABEF は $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{j}}$，$y = 2$ であるので、

$$\iint_{ABEF} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\,ds = \int_0^3\!\!\int_0^1 \left(2x^2\,\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 3z\,\vec{\mathbf{k}}\right) \cdot \vec{\mathbf{j}}\,dxdz = \int_0^3\!\!\int_0^1 2\,dxdz = 6$$

面 OGDC は、$\vec{\mathbf{n}} = -\vec{\mathbf{j}}$，$y = 0$ であるので、

$$\iint_{OGDC} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\,ds = \int_0^3\!\!\int_0^1 \left(2x^2\,\vec{\mathbf{i}} + 3z\,\vec{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(-\,\vec{\mathbf{j}}\right) dxdz = 0$$

面 BCDE は $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{k}}$，$z = 3$ であるので、

$$\iint_{BCDE} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\,ds = \int_0^2\!\!\int_0^1 \left(2x^2\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + 9\vec{\mathbf{k}}\right) \cdot \vec{\mathbf{k}}\,dydz = \int_0^2\!\!\int_0^1 9\,dxdy = 18$$

面 AFGO は $\vec{\mathbf{n}} = -\vec{\mathbf{k}}$，$z = 0$ であるので、

$$\iint_{DEFG} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\,ds = \int_0^2\!\!\int_0^1 \left(2x^2\,\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}}\right) \cdot \left(-\,\vec{\mathbf{k}}\right) dxdy = 0$$

以上の 6 つの積分を合計して

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\,ds = 12 + 0 + 6 + 0 + 18 + 0 = 36$$

問題 2.

$\vec{\mathbf{F}} = 5x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}$ とし、S を $x+2y+4z=8$ の平面のうち、$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ の領域に含まれている部分とするとき、$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ を求めよ。ただし、法線ベクトル方向は原点を離れる方向に向いているものとする。

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iint_R \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \frac{dx\,dy}{\left\| \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{k}} \right\|}$$ を考える。

まず、曲線 S と直交する単位法線ベクトル $\vec{\mathbf{n}}$ を求めるには、曲面 $x+2y+4z=8$ と直交するベクトルが、

$\nabla(x+2y+4z) = \vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 4\vec{\mathbf{k}}$ によって与えられる。よって、曲面 S 上にある任意の点に対する単位法線ベクトル $\vec{\mathbf{n}}$ は次式によって与えられる。

$$n = \frac{\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 4\vec{\mathbf{k}}}{\sqrt{1^2+2^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{21}}\vec{\mathbf{i}} + \frac{2}{\sqrt{21}}\vec{\mathbf{j}} + \frac{4}{\sqrt{21}}\vec{\mathbf{k}}$$

よって、$\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = \left(\frac{1}{\sqrt{21}}\vec{\mathbf{i}} + \frac{2}{\sqrt{21}}\vec{\mathbf{j}} + \frac{4}{\sqrt{21}}\vec{\mathbf{k}} \right) \cdot \vec{\mathbf{k}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$

$$\frac{dx\,dy}{\left\| \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{k}} \right\|} = \frac{\sqrt{21}}{4} dxdy$$

次に、

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} &= \left(5x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{21}}\vec{\mathbf{i}} + \frac{2}{\sqrt{21}}\vec{\mathbf{j}} + \frac{4}{\sqrt{21}}\vec{\mathbf{k}} \right) \\ &= \frac{5x+2y+4z}{\sqrt{21}} = \frac{8+4x}{\sqrt{21}} \end{aligned}$$

（$\because$ 曲面 S の方程式から $z = \dfrac{8-x-2y}{4}$）

よって

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS &= \iint_R \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \frac{dx\,dy}{\left\| \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{k}} \right\|} = \iint_R \left(\frac{8+4x}{\sqrt{21}} \right) \frac{\sqrt{21}}{4} dxdy \\ &= \iint_R (2+x)\,dxdy \end{aligned}$$

xy 平面上の領域 R の上でこの二重積分を計算するには、x を固定して y について 0 から $y = \dfrac{8-x}{2}$ まで積分し、続いて、x について、x=0 から x=8 まで積分する。

$$\int_{x=0}^{8} \int_{y=0}^{(8-x)/2} (2+x)\,dydx = \int_{x=0}^{8} \left(8 + 3x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{224}{3}$$

問題 3

$\vec{\mathbf{F}} = 4x\vec{\mathbf{i}} + 4y\vec{\mathbf{j}} - 2z\vec{\mathbf{k}}$ とし、S を $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ の xy 平面より上の半球面とするとき、
$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ を求めよ。ただし、法線ベクトル方向は原点を離れる方向に向いているものとする。

まず、$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ とおくと

$$\nabla g = 2x\vec{\mathbf{i}} + 2y\vec{\mathbf{j}} + 2z\vec{\mathbf{k}}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla g\| &= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2} \\ &= 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4\end{aligned}$$

だから単位法線ベクトル $\vec{\mathbf{n}}$ は

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{1}{2}\left(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}\right)$$

となる。したがって、S_1 上では

$$\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \left(4x\vec{\mathbf{i}} + 4y\vec{\mathbf{j}} - 2z\vec{\mathbf{k}}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}\right) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 3x^2 + 3y^2 - 4$$

$$\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\left(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}\right) \cdot \vec{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}z = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2}$$

S_1 を xy 平面に射影すると $D = \left\{(x,y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 4\right\}$ だから、

$\int_{S_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_D \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \frac{1}{\|\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{k}}\|} dxdy$ より、

$$\int_{S_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_D \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \frac{1}{\|\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{k}}\|} dxdy = \iint_D \frac{2\left(3x^2 + 3y^2 - 4\right)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dxdy$$

（$x = r\sin\theta,\ y = r\cos\theta$ と変数変換すると）

$$\begin{aligned}&= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{3r^2 - 4}{\sqrt{4 - r^2}} rdr = 4\pi \int_0^2 \frac{8 - 3\left(4 - r^2\right)}{\sqrt{4 - r^2}} rdr \\ &= 4\pi\left[-8\sqrt{4 - r^2} + (4 - r^2)^{3/2}\right]_0^2 = 32\pi\end{aligned}$$

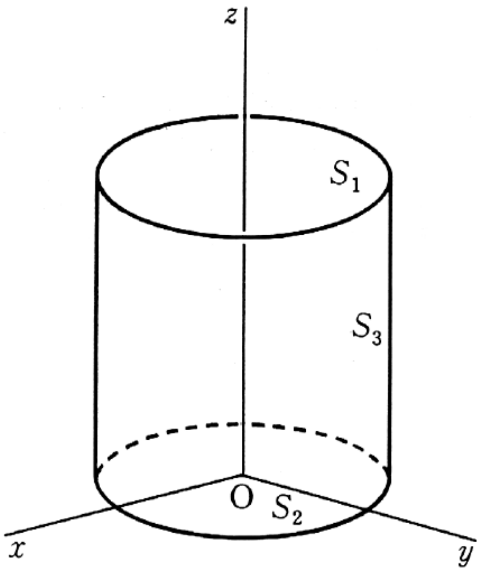
となる。

問題 4

V を柱面 $x^2+y^2=1$ と 2 平面 $z=0, z=1$ で囲まれた領域とし、S を V の境界面とする。

$\vec{\mathbf{X}}=x^3\vec{\mathbf{i}}+yz\vec{\mathbf{j}}+xz^2\vec{\mathbf{k}}$ としたとき $\displaystyle\oiint_S \vec{\mathbf{X}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\,dS$ を求めよ。

内柱の上底、下底、側面をそれぞれ S_1, S_2, S_3 と名付ける。



$$S_1:\vec{\mathbf{r}}(u,v)=u\vec{\mathbf{i}}+v\vec{\mathbf{j}}+\vec{\mathbf{k}}\quad(u^2+v^2\le 1)$$

$$S_2:\vec{\mathbf{r}}(u,v)=u\vec{\mathbf{i}}+v\vec{\mathbf{j}}\quad(u^2+v^2\le 1)$$

$$S_3:\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\cos u\,\vec{\mathbf{i}}+\sin u\,\vec{\mathbf{j}}+v\vec{\mathbf{k}}$$
$$(0\le u\le 2\pi,\quad 0\le v\le 1)$$

とパラメーター表面する。S_1, S_2 については、

$$\vec{\mathbf{r}}_u\times\vec{\mathbf{r}}_v=\vec{\mathbf{k}}$$

なので、法線は Z 軸の正の方向。

S_3 は、

$$\vec{\mathbf{r}}_u\times\vec{\mathbf{r}}_v=\cos u\cdot\vec{\mathbf{i}}+\sin u\cdot\vec{\mathbf{j}}$$

であるので、側面の外側が表になっている。したがって、

$$S=S_1+(-S_2)+S_3$$

となる。

$$\int_{S_1}\vec{\mathbf{X}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\,dS=\int_{S_1}\vec{\mathbf{X}}\cdot\vec{\mathbf{k}}\,dS=\iint_{u^2+v^2\le 1}u\,dudv=0$$

$$\int_{S_2}\vec{\mathbf{X}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\,dS=\int_{S_2}\vec{\mathbf{X}}\cdot\vec{\mathbf{k}}\,dS=\int_{S_2}0\,dS=0$$

$$\int_{S_3}\vec{\mathbf{X}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\,dS=\iint_{\substack{0\le u\le 2\pi\\ 0\le v\le 1}}\left(\cos^3 u\cdot\vec{\mathbf{i}}+v\sin u\cdot\vec{\mathbf{j}}\right)\cdot\left(\cos u\cdot\vec{\mathbf{i}}+\sin u\cdot\vec{\mathbf{j}}\right)dudv$$
$$=\int_0^{2\pi}du\int_0^1\left(\cos^4 u+v\sin^2 u\right)dv=\int_0^{2\pi}\left(\cos^4 u+\frac{1}{2}\sin^2 u\right)du=\frac{5}{4}\pi$$

ゆえに

$$\oint_S\vec{\mathbf{X}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\,dS=\int_{S_1}\vec{\mathbf{X}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\,dS-\int_{S_2}\vec{\mathbf{X}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\,dS+\int_{S_3}\vec{\mathbf{X}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\,dS=\frac{5}{4}\pi$$