問題 1. $\vec{\mathbf{F}} = y\,\vec{\mathbf{i}} - z\,\vec{\mathbf{j}} + x\vec{\mathbf{k}}$ で C が原点 O から、点(1,1,2)に向う線分のとき、

次の線積分を求めよ。

(1) $\int_C \vec{\mathbf{F}} ds$　　(2) $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$　　(3) $\int_C \vec{\mathbf{F}} \times d\vec{\mathbf{r}}$

問題 2. $\vec{\mathbf{F}} = z\,\vec{\mathbf{i}} + 2(x+y)\,\vec{\mathbf{j}} + x\vec{\mathbf{k}}$ で C が原点 O から、点(3,2,1)に向う線分のとき、

次の線積分を求めよ。

(1) $\int_C \vec{\mathbf{F}} ds$　　(2) $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$　　(3) $\int_C \vec{\mathbf{F}} \times d\vec{\mathbf{r}}$

問題 3. $\vec{\mathbf{F}} = x^2\vec{\mathbf{i}} + z\,\vec{\mathbf{j}} + y\vec{\mathbf{k}}$ で C が原点 O から、点(1,3,2)に向う線分のとき、

次の線積分を求めよ。

(1) $\int_C \vec{\mathbf{F}} ds$　　(2) $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$　　(3) $\int_C \vec{\mathbf{F}} \times d\vec{\mathbf{r}}$

問題 4. 原点 O から点 B(2,0,3)を通り点 A(3,5,4)に向う折れ線を C とするとき、

$$\int_C (x+y+z)\,ds$$

を求めよ。

問題 5. 原点 O から点 B(1,0,3)を通り、点 A(2,4,3)に向う折れ線を C とするとき、

$\int_C (x-y+z)\,ds$　　を求めよ。

1. $\vec{\mathbf{F}} = y\vec{\mathbf{i}} - z\vec{\mathbf{j}} + x\vec{\mathbf{k}}$ で C が原点 O から、点(1,1,2)に向う線分のとき、

次の線積分を求めよ。

(1) $\int_C \vec{\mathbf{F}} ds$　　(2) $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$　　(3) $\int_C \vec{\mathbf{F}} \times d\vec{\mathbf{r}}$

線分 C は、原点 O から点(1,1,2)に向う線分のため、$x(t), y(t), z(t)$ はそれぞれ、

$$x(t) = t,\quad y(t) = t,\quad z(t) = 2t \qquad 0 \le t \le 1 \qquad (1)$$

と表されるため、C 線上の位置ベクトルは、$\vec{\mathbf{r}} = t\vec{\mathbf{i}} + t\vec{\mathbf{j}} + 2t\vec{\mathbf{k}}\ (0 \le t \le 1)$ と表せる。

ゆえに $\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}$　となる。

つぎに、式(1)を用いて ds を表すと

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2}\ dt \\ &= \sqrt{\left(\frac{d(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(2t)}{dt}\right)^2}\ dt \qquad \text{となる。} \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}\,dt = \sqrt{6}dt \end{aligned}$$

さらに、式(1)を用いると $\vec{\mathbf{F}}$ は、　$\vec{\mathbf{F}} = y\vec{\mathbf{i}} - z\vec{\mathbf{j}} + x\vec{\mathbf{k}} = t\vec{\mathbf{i}} - 2t\vec{\mathbf{j}} + t\vec{\mathbf{k}}$　と表せる。

(1) $\displaystyle \int_C \vec{\mathbf{F}} ds = \vec{\mathbf{i}}\int_0^1 t \cdot \sqrt{6}dt + \vec{\mathbf{j}}\int_0^1 -2t \cdot \sqrt{6}dt + \vec{\mathbf{k}}\int_0^1 t \cdot \sqrt{6}dt = \frac{\sqrt{6}}{2}\vec{\mathbf{i}} - \sqrt{6}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\sqrt{6}}{2}\vec{\mathbf{k}}$

(2)

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_0^1 \left(t\vec{\mathbf{i}} - 2t\vec{\mathbf{j}} + t\vec{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}\right) dt = \int_0^1 (1 - 2 + 2)t dt = \frac{1}{2}$$

(3)

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}} \times \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} &= \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ t & -2t & t \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2t & t \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} t & t \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} t & -2t \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{k}} \\ &= (-4t - t)\vec{\mathbf{i}} + (t - 2t)\vec{\mathbf{j}} + (t + 2t)\vec{\mathbf{k}} \qquad \text{ゆえに} \\ &= -5t\vec{\mathbf{i}} - t\vec{\mathbf{j}} + 3t\vec{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \times d\vec{\mathbf{r}} = \int_0^1 \left(-5t\vec{\mathbf{i}} - t\vec{\mathbf{j}} + 3t\vec{\mathbf{k}}\right) dt = -\frac{5}{2}\vec{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\vec{\mathbf{j}} + \frac{3}{2}\vec{\mathbf{k}} \quad \text{となる。}$$

2. $\vec{\mathbf{F}} = z\,\vec{\mathbf{i}} + 2(x+y)\vec{\mathbf{j}} + x\vec{\mathbf{k}}$ で C が原点 O から、点(3,2,1)に向う線分のとき、

次の線積分を求めよ。

(1) $\int_C \vec{\mathbf{F}} ds$　　(2) $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$　　(3) $\int_C \vec{\mathbf{F}} \times d\vec{\mathbf{r}}$

線分 C は $\vec{\mathbf{r}} = 3t\vec{\mathbf{i}} + 2t\vec{\mathbf{j}} + t\vec{\mathbf{k}}$ $(0 \le t \le 1)$ と表せるから、線分 C 上では、$\vec{\mathbf{F}} = t\vec{\mathbf{i}} + 10t\vec{\mathbf{j}} + 3t\vec{\mathbf{k}}$、

$ds = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}dt = \sqrt{14}dt$、 $\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = 3\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$　となる。

(1) $\int_C \vec{\mathbf{F}} ds = \vec{\mathbf{i}}\int_0^1 t \cdot \sqrt{14}dt + \vec{\mathbf{j}}\int_0^1 10t \cdot \sqrt{14}dt + \vec{\mathbf{k}}\int_0^1 3t \cdot \sqrt{14}dt = \dfrac{\sqrt{14}}{2}\vec{\mathbf{i}} + 5\sqrt{14}\vec{\mathbf{j}} + \dfrac{3\sqrt{14}}{2}\vec{\mathbf{k}}$

(2) $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_0^1 (t\vec{\mathbf{i}} + 10t\vec{\mathbf{j}} + 3t\vec{\mathbf{k}}) \cdot (3\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}})dt = \int_0^1 (3 + 20 + 3)tdt = 13$

(3)

$$\vec{\mathbf{F}} \times \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ t & 10t & 3t \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10t & 3t \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} 3t & t \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} t & 10t \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{k}}$$

$$= (10t - 6t)\vec{\mathbf{i}} + (9t - t)\vec{\mathbf{j}} + (2t - 30t)\vec{\mathbf{k}}$$　ゆえに

$$= 4t\vec{\mathbf{i}} + 8t\vec{\mathbf{j}} - 28t\vec{\mathbf{k}}$$

$\int_C \vec{\mathbf{F}} \times d\vec{\mathbf{r}} = \int_0^1 (4t\vec{\mathbf{i}} + 8t\vec{\mathbf{j}} - 28t\vec{\mathbf{k}})dt = 2\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{j}} - 14\vec{\mathbf{k}}$　となる。

3. $\vec{\mathbf{F}} = x^2\vec{\mathbf{i}} + z\,\vec{\mathbf{j}} + y\vec{\mathbf{k}}$ で C が原点 O から、点(1,3,2)に向う線分のとき、

次の線積分を求めよ。

(1) $\int_C \vec{\mathbf{F}} ds$　　(2) $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$　　(3) $\int_C \vec{\mathbf{F}} \times d\vec{\mathbf{r}}$

線分 C は $\vec{\mathbf{r}} = t\vec{\mathbf{i}} + 3t\vec{\mathbf{j}} + 2t\vec{\mathbf{k}}$ $(0 \le t \le 1)$ と表せるから、線分 C 上では、$\vec{\mathbf{F}} = t^2\vec{\mathbf{i}} + 2t\vec{\mathbf{j}} + 3t\vec{\mathbf{k}}$、

となるので、$ds = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}dt = \sqrt{14}dt$、 $\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}$

となる。

(1) $\int_C \vec{\mathbf{F}} ds = \vec{\mathbf{i}}\int_0^1 t^2 \cdot \sqrt{14}dt + \vec{\mathbf{j}}\int_0^1 2t \cdot \sqrt{14}dt + \vec{\mathbf{k}}\int_0^1 3t \cdot \sqrt{14}dt = \dfrac{\sqrt{14}}{3}\vec{\mathbf{i}} + \sqrt{14}\vec{\mathbf{j}} + \dfrac{3\sqrt{14}}{2}\vec{\mathbf{k}}$

(2) $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_0^1 \left(t^2\vec{\mathbf{i}} + 2t\vec{\mathbf{j}} + 3t\vec{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}\right)dt = \int_0^1 \left(t^2 + 6t + 6t\right)dt = 6\frac{1}{3}$

(3)

$$\vec{\mathbf{F}} \times \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ t^2 & 2t & 3t \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2t & 3t \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} 3t & t^2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} t^2 & 2t \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{k}}$$

$$= (4t - 9t)\vec{\mathbf{i}} + \left(3t - 2t^2\right)\vec{\mathbf{j}} + \left(3t^2 - 2t\right)\vec{\mathbf{k}}$$　ゆえに

$$= -5t\vec{\mathbf{i}} + \left(3t - 2t^2\right)\vec{\mathbf{j}} + \left(3t^2 - 2t\right)\vec{\mathbf{k}}$$

$\int_C \vec{\mathbf{F}} \times d\vec{\mathbf{r}} = \int_0^1 \left(-5t\vec{\mathbf{i}} + \left(3t - 2t^2\right)\vec{\mathbf{j}} + \left(3t^2 - 2t\right)\vec{\mathbf{k}}\right)dt = -\frac{5}{2}\vec{\mathbf{i}} + \frac{5}{6}\vec{\mathbf{j}}$　となる。

4.　原点 O から点 B(2,0,3)を通り点 A(3,5,4)に向う折れ線を C とするとき、

$$\int_C (x + y + z)\,ds$$

を求めよ。

C を $\vec{\mathbf{r}}(t) = x(t)\vec{\mathbf{i}} + y(t)\vec{\mathbf{j}} + z(t)\vec{\mathbf{k}}$ とパラメータ表示し、

$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\frac{ds}{dt}dt = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$　を 用 い る 。

$\overrightarrow{OB} = 2\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{k}}$、$\overrightarrow{BA} = \vec{\mathbf{i}} + 5\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$ だから $\vec{\mathbf{r}}(t)$ を考える。

$\overrightarrow{OB}$ の線分は $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{k}}$ より、$\vec{\mathbf{r}}(t)$ は、$x(t) = 2t,\quad z(t) = 3t \quad (0 \le t \le 1)$　となり、

$ds = \sqrt{2^2 + 3^2}dt = \sqrt{13}dt$　より $\int_{OB} f(x,y,z)ds = \int_0^1 (2t + 3t)\sqrt{13}dt = \frac{5}{2}\sqrt{13}$　となる。

$\overrightarrow{BA}$ の線分は $\overrightarrow{BA} = \vec{\mathbf{i}} + 5\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$ より、$\vec{\mathbf{r}}(t)$ は、$x(t) = 2 + t,\ y(t) = 5t,\ z(t) = 3 + t\ (0 \le t \le 1)$ となり、

$ds = \sqrt{1^2 + 5^2 + 1^2} = 3\sqrt{3}dt$　より

$\int_{BA} f(x + y + z)ds = \int_0^1 (2 + t + 5t + 3 + t)3\sqrt{3}dt = 15\sqrt{3} + \frac{21}{2}\sqrt{3} = \frac{51}{2}\sqrt{3}$　となる。

ゆえに　$\int_C (x + y + z)\,ds = \int_{OB} (x + y + z)\,ds + \int_{BA} (x + y + z)\,ds = \frac{5}{2}\sqrt{13} + \frac{51}{2}\sqrt{3}$

5. 原点 O から点 B(1,0,3)を通り、点 A(2,4,3)に向う折れ線を C とするとき、

$$\int_C (x-y+z)\,ds$$ を求めよ。

C を $\vec{\mathbf{r}}(t)=x(t)\vec{\mathbf{i}}+y(t)\vec{\mathbf{j}}+z(t)\vec{\mathbf{k}}$ とパラメータ表示し、

$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\frac{ds}{dt}dt=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$ を用いる。

$\overrightarrow{OB}=\vec{\mathbf{i}}+3\vec{\mathbf{k}}$ 、$\overrightarrow{AB}=\vec{\mathbf{i}}+4\vec{\mathbf{j}}$ だから $\vec{\mathbf{r}}(t)$ は

$\overrightarrow{OB}$ の線分は $\overrightarrow{OB}=\vec{\mathbf{i}}+3\vec{\mathbf{k}}$ より、$\vec{\mathbf{r}}(t)$ は、$x(t)=t,\quad z(t)=3t\quad (0\le t\le 1)$ となり、

$ds=\sqrt{1^2+3^2}dt=\sqrt{10}dt$ より $\int_{OB} f(x-y+z)ds=\int_0^1(t+3t)\sqrt{10}dt=2\sqrt{10}$

となる。

$\overrightarrow{BA}$ の線分は $\overrightarrow{BA}=\vec{\mathbf{i}}+4\vec{\mathbf{j}}$ より、$\vec{\mathbf{r}}(t)$ は、$x(t)=1+t,\ y(t)=4t,\ z(t)=3\quad (0\le t\le 1)$ となり、

$ds=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}dt$ より

$$\int_{BA} f(x-y+z)ds=\int_0^1(1+t-4t+3)\sqrt{17}dt=-\frac{3}{2}\sqrt{17}+4\sqrt{17}=\frac{5}{2}\sqrt{17}$$

となる。

ゆえに

$$\int_C (x-y+z)\,ds=\int_{OB}(x-y+z)\,ds+\int_{BA}(x-y+z)\,ds=2\sqrt{10}+\frac{5}{2}\sqrt{17}$$