復習問題

問 1

バネの先端に取り付けられた質量 m の質点(物体)の運動を考えるために、次の 3 つを仮定する。
(仮定1)フックの法則：質点にかかるバネの力はバネの伸びに比例する。
(仮定2)ニュートンの運動の第2法則：「力」＝「質量」×「加速度」
(仮定3)線形摩擦：摩擦力は速度に比例して進行方向に逆に働く。
このとき、仮定1，2，3 より、バネの伸び $x(t)$ に関する微分方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} \quad (c>0,\ k>0,\ m>0) \qquad \text{(a)}$$

が得られる。この方程式について、以下の問いに答えよ。
ただし、k はベキ乗数、c は摩擦力に関する比例乗数とする。

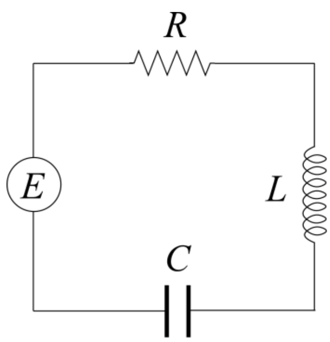
(1) $c^2-4mk<0$ の場合と $c^2-4mk>0$ の場合とでは、どちらの方が(線形)摩擦力が大きいといえるか？理由を述べて答えよ。

(2) $c^2-4mk<0$ の時、式(a)の一般解を求めよ。
また、$t\to\infty$ の時、$x(t)$の挙動について説明せよ。

(3) $c^2-4mk>0$ の時、式(a)の一般解を求めよ。
また、$t\to\infty$ の時、$x(t)$の挙動について説明せよ。

注：挙動については、「$x(t)$はどのような値になるのか？」「振動するのか？」という点を答えよ。

問 2



(1)　右図の電気回路に対して、L,R,C,I,E,t を用いて電流 I と時間 t の線形2階微分方程式を導け。
(2)　(1)の微分方程式を解き、
L=2 ヘンリー、R=100 オーム、
C=10^{-4} ファラッド、E= 100 ボルト
で電流と電荷を決定せよ。
ただし、初期には電荷も電流もないとする。

復習問題

問 1

(1)　$c>0, k>0, m>0$ のため、$c^2-4mk<0$ は $c^2<4mk$ 、$c^2-4mk>0$ は $c^2>4mk$ と

書きあえられるため、摩擦係数である c が $4mk$ より大きい方が、$c^2-4mk>0$ の方が（線形）摩擦力が大きいといえる。

(2)　まず、初めに式(a)を解く。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0 \quad (c>0,\ k>0,\ m>0) \qquad \text{(a)}$$

式(a)の特性方程式は、

$$m\lambda^2+c\lambda+k=0 \qquad \lambda=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4km}}{2m}$$

$A=\dfrac{c}{2m}$, $B=\dfrac{\sqrt{c^2-4km}}{2m}$ とおくと $\lambda=-A\pm iB$ となるので、一般解は

$$x=de^{-At+iBt}+fe^{-At-iBt}$$

で与えられる。（d,f は積分定数とする。）

これをオイラーの公式で

$$e^{-At\pm iBt}=e^{-At}(\cos Bt+i\sin Bt)$$

これを、$a=d+f,\quad b=i(d+f)$ とすれば

$$x=(a\cos Bt+b\sin Bt)e^{-At} \qquad \text{(b)}$$

を得る。ここで初期条件 $x(0)=x_0$ を入れると $a=x_0$ を得る。

次に初速度=0 の条件を入れるために x を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}=[(-Aa+Bb)\cos Bt-(Ab+Ba)\sin Bt]e^{-At}$$

ここで、$\left[\dfrac{dx}{dt}\right]_{t=0}=0$ とおいて、$-Aa+Bb=0$, $b=\dfrac{A}{B}x_0$ を得る。　これを式(b)に代入すると

復習問題

$$x = x_0\left[\cos Bt + \frac{A}{B}\sin Bt\right]e^{-At}$$ となる。

ゆえに、$t \to \infty$ のとき、ある周期で振動しながら $x \to 0$ となる。

(3)

途中まで(2)の解き方で、$c^2 - 4mk > 0$ の時、特性方程式の解は2つの実数になって

$\lambda = -A \pm B$　となるので、一般解は、

$$x = \left(ae^{Bt} + be^{-Bt}\right)e^{-At}$$ （a,b は積分定数とする。）　(c)

初期条件から

$$x_0 = a + b$$

$$\left[\frac{dx}{dt}\right]_{t=0} = \left[\left\{(B-A)a - (B+A)b\right\}e^{-At}\right]_{t=0} = (B-A)a - (B+A)b = 0$$

ゆえに、

$$a = \frac{A+B}{2B}x_0$$

$$b = \frac{B-A}{2B}x_0$$

となり

これを式(c)に代入して

$$x = x_0\left[\cosh(Bt) + \frac{A}{B}\sinh(Bt)\right]e^{-At}$$

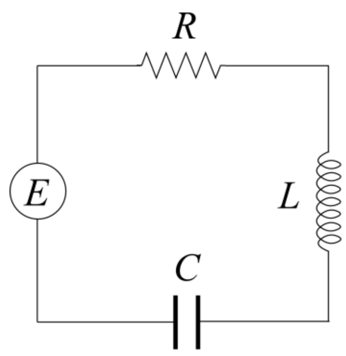
となる。

ゆえに、$t \to \infty$ のとき、振動せずに $x \to 0$ となる。

復習問題

問２

(1)



右図の回路は、起電力と直列につないだ抵抗、コイルおよびコンデンサーを持っている。キルヒホッフの法則を適用すると

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C}=E(t) \qquad (1)$$

$\frac{dQ}{dt}=I$ であるから、E が一定のときは(1)を微分して、

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=\frac{dE(t)}{dt} \qquad (2)$$

が得られる。

(2)

式(2)の線形２階斉次微分方程式は

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=0$$

であり、その補助方程式は

$$\lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{CL}=0$$

となり、根

$$\lambda=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4L/C}}{2L} \qquad (3)$$

をもつ。

ここで、電気回路における各値は、L=1 ヘンリー、R=100 オーム、C=10^{-4} ファラッド、E=100 ボルト、t=0 の初期条件より、電荷はゼロ(Q=0)、電流の強さもゼロ(I=0)であるので、

式(3)より

$$\lambda=-50\pm50\sqrt{3}\,i$$

したがって、解は

$$I=e^{-50t}(A\cos50\sqrt{3}\,t+B\sin50\sqrt{3}\,t$$

t=0 において I=0 だから定数 A=0 でなければならない。そこで

復習問題

$$I = Be^{-50t}\sin 50\sqrt{3}\,t$$

さて、式(1)から

$$Q(t) = C\left[E(t) - L\frac{dI}{dt} - RI\right]$$
$$= 10^{-4}\left[1000\cos(100t) - Be^{-50t}\left\{\sin 50\sqrt{3}\,t + \sqrt{3}\cos 50\sqrt{3}\,t\right\}\right]$$

また、t=0 のとき Q=0 だから、

$$0 = \frac{1}{10} - B\frac{\sqrt{3}}{200}$$

ただし、

$$B = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

したがって

$$Q(t) = \frac{1}{10}\cos(100t) - \frac{e^{-50t}}{10\sqrt{3}}\left(\sin 50\sqrt{3}\,t + \sqrt{3}\cos 50\sqrt{3}\,t\right)$$

となる。