復習問題

1. 以下に示す連立微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

---

2. 以下に示す連立微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

---

3. 以下に示す連立微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

---

4. 次の連立微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

---

5. 次の連立微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

復習問題

1. 以下に示す連立微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

式(1)より

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2 \\ y_2' = -2y_1 - y_2 \end{cases}$$

第2式をy_1でまとめると$y_1 = -\dfrac{y_2'}{2} - \dfrac{y_2}{2}$となり、この式を第1式に代入すると

$$\left(-\frac{y_2'}{2} - \frac{y_2}{2}\right)' = 3\left(-\frac{y_2'}{2} - \frac{y_2}{2}\right) + 2y_2$$

$$-y_2'' - y_2' = -3y_2' - 3y_2 + 4y_2$$

$$y_2'' - 2y_2' + y_2 = 0 \qquad (2)$$

式(2)の特性方程式は$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$となり、その解は$\lambda = 1$となり、式(2)の解は

$$y_2 = C_1 e^x + C_2 x e^x = (C_1 + C_2 x)e^x \qquad (3)$$

となる。

$y_1 = -\frac{y_2'}{2} - \frac{y_2}{2}$に式(3)を代入すると

$$y_1 = -\frac{1}{2}(C_1 e^x + C_2 x e^x)' - \frac{1}{2}(C_1 e^x + C_2 x e^x)$$

$$y_1 = -\frac{C_1}{2}e^x - \frac{C_2}{2}e^x - \frac{C_2}{2}xe^x - \frac{C_1}{2}e^x - \frac{C_2}{2}xe^x = \left\{-C_1 - C_2\left(\frac{1}{2} + x\right)\right\}e^x$$

$$y_1 = -C_1 e^{2x} - C_2(1 + x)e^{2x}$$

となる。ゆえに、式(1)の一般解は

$$y_1 = \left\{-C_1 - C_2\left(\frac{1}{2} + x\right)\right\}e^x$$

$$y_2 = (C_1 + C_2 x)e^x$$

となる。

復習問題

2. 以下に示す連立微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$y_1' = y_1 + y_2 \qquad y_2' = -y_1 + 3y_2$ 　(1)　第一項を y_2 でまとめると

$$y_2 = y_1' - y_1 \qquad (2)$$

となり、式(2)を式(1)の第二項に代入すると

$$(y_1' - y_1)' = -y_1 + 3(y_1' - y_1) \qquad (3)$$

となり、式(3)の y_1 を y に変えて、式を書き直すと

$y'' - 4y' + 4y = 0$ 　(4)　式(4)を解き、y を y_1 に戻すと

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} = (C_1 + C_2 x)e^{2x} \qquad (5)$$

式(1)の第一項に式(5)を代入すると

$$(C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x})' = (C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}) + y_2 \qquad (6)$$

式(6)を y_2 でまとめると

$$\begin{aligned} y_2 &= (C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x})' - (C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}) \\ &= 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + 2C_2 x e^{2x} - C_1 e^{2x} - C_2 x e^{2x} \\ &= C_1 e^{2x} + C_2(1+x)e^{2x} \\ &= \{C_1 + C_2(1+x)\}e^{2x} \end{aligned}$$

となる。以上をまとめると、式(1)の解は、

$$y_1 = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$$

$y_2 = \{C_1 + C_2(1+x)\}e^{2x}$ 　となる。

復習問題

3. 以下に示す連立微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

一方の従属変数を消去することによって求める。

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 - y_2 & (1) \\ y'_2 = y_1 + 3y_2 & (2) \end{cases}$$

与えられた方程式の式(1)を y_2 について解くと

$$y'_1 = y_1 - y_2 \qquad y_2 = -y'_1 + y_1 \qquad (3)$$

式(3)を式(2)に代入して変数 y_2 を消去すると

$$\begin{aligned} &(-y'_1 + y_1)' = y_1 + 3(-y'_1 + y_1) \\ &-y''_1 + y'_1 = y_1 - 3y'_1 + 3y_1 \\ &y''_1 - 4y'_1 + 4y_1 = 0 \end{aligned}$$

これは定数係数２階線形微分方程式なので、その特性方程式の解は

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$　より、$\lambda = 2$ となる。よって、一般解は

$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$　（C_1, C_2 は任意定数）

この一般解を(3)に代入すると

$$\begin{aligned} y_2 &= -(C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x})' + (C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}) \\ &= -2C_1 e^{2x} - 2C_2 x e^{2x} - C_2 e^{2x} + C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} \\ &= -C_1 e^{2x} - C_2 x e^{2x} - C_2 e^{2x} \end{aligned}$$

与えられた方程式の一般解は

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} x \\ -x-1 \end{pmatrix} e^{2x}$　（C_1, C_2 は任意定数）となる。

復習問題

4. 次の連立微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

式(1)より

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2 \\ y_2' = -2y_1 - y_2 \end{cases}$$

第2式をy_1でまとめると$y_1 = -\frac{y_2'}{2} - \frac{y_2}{2}$となり、この式を第1式に代入すると

$$\left(-\frac{y_2'}{2} - \frac{y_2}{2}\right)' = 3\left(-\frac{y_2'}{2} - \frac{y_2}{2}\right) + 2y_2$$

$$-y_2'' - y_2' = -3y_2' - 3y_2 + 4y_2$$

$$y_2'' - 2y_2' + y_2 = 0 \qquad (2)$$

式(2)の特性方程式は$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$となり、その解は$\lambda = 1$となり、式(2)の解は

$$y_2 = C_1 e^x + C_2 x e^x = (C_1 + C_2 x)e^x \quad (3)$$

となる。

$y_1 = -\frac{y_2'}{2} - \frac{y_2}{2}$ に式(3)を代入すると

$$y_1 = -\frac{1}{2}\left(C_1 e^x + C_2 x e^x\right)' - \frac{1}{2}\left(C_1 e^x + C_2 x e^x\right)$$

$$y_1 = -\frac{C_1}{2}e^x - \frac{C_2}{2}e^x - \frac{C_2}{2}xe^x - \frac{C_1}{2}e^x - \frac{C_2}{2}xe^x = \left\{-C_1 - C_2\left(\frac{1}{2} + x\right)\right\}e^x$$

$$y_1 = -C_1 e^{2x} - C_2(1 + x)e^{2x}$$

となる。ゆえに、式(1)の一般解は

$$y_1 = \left\{-C_1 - C_2\left(\frac{1}{2} + x\right)\right\}e^x$$

$$y_2 = (C_1 + C_2 x)e^x$$

となる。

復習問題

5. 次の連立微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

一方の従属変数を消去することによって求める。

$$\begin{cases} y'_1 = -2y_1 + 2y_2 & (1) \\ y'_2 = -5y_1 + 4y_2 & (2) \end{cases}$$

与えられた方程式の式(1)を y_2 について解くと

$$y'_1 = -2y_1 + 2y_2$$

$$y_2 = \frac{y'_1 + 2y_1}{2} \qquad (3)$$

式(3)を式(2)に代入して変数 y_2 を消去すると

$$\left(\frac{y'_1 + 2y_1}{2}\right)' = -5y_1 + 4\left(\frac{y'_1 + 2y_1}{2}\right)$$

$$y''_1 + 2y'_1 = -10y_1 + 4y'_1 + 8y_1$$

$$y''_1 - 2y'_1 + 2y_1 = 0$$

これは定数係数２階線形微分方程式なので、その特性方程式の解は

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i) = 0$$

より、$1 \pm i$ となる。

よって、一般解は

$$y_1 = C'_1 e^x \cos x + C'_2 e^x \sin x \qquad (C'_1, C'_2 \text{は任意定数})$$

この一般解を(3)に代入すると

$$y_2 = \frac{(C'_1 e^x \cos x + C'_2 e^x \sin x)'}{2} + 2\frac{C'_1 e^x \cos x + C'_2 e^x \sin x}{2}$$

$$= C'_1 \frac{e^x(3\cos x - \sin x)}{2} + C'_2 \frac{e^x(3\cos x + \sin x)}{2}$$

ここで、C'_1, C'_2 を改めて $2C_1$, $2C_2$ とすれば、与えられた方程式の一般解は

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^x \begin{pmatrix} 2\cos x \\ 3\cos x - \sin x \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} 2\sin x \\ 3\cos x + \sin x \end{pmatrix}$$

（C_1, C_2 は任意定数）

となる。