復習問題

以下に示す非斉次方程式の一般解を求めよ。

1.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=e^{2x}$$

2.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=\cos x$$

3.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=x^2+x$$

4.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=e^{-2x}$$

5.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=xe^{x}$$

6.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+12y=4x$$

7.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+4y=\cos x$$

8.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=e^{2x}$$

9.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-5y=\cos x+\sin x$$

10.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=x^2+4e^{-x}$$

復習問題

1. 以下に示す微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=e^{2x}$$

$y''+2y'+y=e^{2x}$ の斉次方程式 $y''+2y'+y=0$ の特性方程式 $\lambda^2+2\lambda+1=0$ は、

$$(\lambda+1)^2=0$$

と重根となり、$y''+2y'+y=0$ の基本解は、

$$y_1=e^{-x}\text{、}\quad y_2=xe^{-x}$$

となり、それぞれの解を微分したものは、

$$y'_1=-e^{-x}\text{、}y'_2=(1-x)e^{-x}$$

となる。ゆえに特解は、

$$\Delta=y_1y'_2-y'_1y_2=e^{-x}(1-x)e^{-x}-\left(-e^{-x}\right)xe^{-x}=e^{-2x}$$

$$\begin{aligned}y_p&=-y_1\int\frac{f(x)y_2}{\Delta}dx+y_2\int\frac{f(x)y_1}{\Delta}dx\\&=-e^{-x}\int\frac{e^{2x}xe^{-x}}{e^{-2x}}dx+xe^{-x}\int\frac{e^{2x}e^{-x}}{e^{-2x}}dx\\&=-e^{2x}\frac{1}{3}x+\frac{e^{2x}}{9}+\frac{xe^{2x}}{3}=\frac{e^{2x}}{9}\end{aligned}$$

となる。

ゆえに、一般解は、

$$y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\frac{e^{2x}}{9}$$

ただし、$C_1,\quad C_2$ は積分定数とする。

となる。

復習問題

2. 以下に示す微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=\cos x$$

$y''+3y'+2y=\cos x$ の斉次方程式 $y''+3y'+2y=0$ の特性方程式 $\lambda^2+3\lambda+2=0$ より

$(\lambda+2)(\lambda+1)=0$ より

$\lambda=-1,-2$ となり、基本解は、$y_1=C_1e^{-x}$,　$y_2=C_2e^{-2x}$　(1) となる。

$y''+3y'+2y=\cos x$ の特解を $y=A\cos x+B\sin x$ と仮定すると、

$$y'=-A\sin x+B\cos x$$
$$y''=-A\cos x-B\sin x$$

となり、これらの式を与えられた微分方程式に代入する。

$$-A\cos x-B\sin x+3(-A\sin x+B\cos x)+2(A\cos x+B\sin x)$$
$$=(-A+3B+2A)\cos x+(-B-3A+2B)\sin x=(A+3B)\cos x+(-3A+B)\sin x$$
$$=\cos x$$

上式を $\cos x$ と $\sin x$ にまとめると、

$$A+3B=1$$
$$-3A+B=0$$

となる。次に、この連立方程式を解くと $A=\dfrac{1}{10}$,　$B=\dfrac{3}{10}$ となるので、

$y''+3y'+2y=\cos x$ の特解は、$y=\dfrac{1}{10}\cos x+\dfrac{3}{10}\sin x$　(2) となる。

(1), (2)より、$y''+3y'+2y=\cos x$ の一般解は

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\frac{1}{10}\cos x+\frac{3}{10}\sin x$$

ただし、C_1,　C_2 は積分定数とする。

となる。

復習問題

3. 以下に示す微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=x^2+x$$

$y''-2y'+y=x^2+x$ の斉次方程式 $y''-2y'+y=0$ の特性方程式 $\lambda^2-2\lambda+1=0$ は、

$$(\lambda-1)^2=0$$

と重根となり、$y''-2y'+y=0$ の基本解は、

$y_1=e^x$、　$y_2=xe^x$

となり、それぞれの解を微分したものは、

$y'_1=e^x$、$y'_2=(1+x)e^x$

となる。ゆえに特解は、

$$\Delta=y_1y'_2-y'_1y_2=e^x(1+x)e^x-(e^x)xe^x=e^{2x}$$

$$\begin{aligned}
y_p&=-y_1\int\frac{f(x)y_2}{\Delta}dx+y_2\int\frac{f(x)y_1}{\Delta}dx\\
&=-e^x\int\frac{(x^2+x)xe^x}{e^{2x}}dx+xe^x\int\frac{(x^2+x)e^x}{e^{2x}}dx\\
&=-e^x\int(x^3+x^2)e^{-x}dx+xe^x\int(x^2+2x)e^{-x}dx\\
&=-e^x\left[-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)-e^{-x}(x^2+2x+2)\right]\\
&\quad+xe^x\left[-e^{-x}(x^2+2x+2)-e^{-x}(x+1)\right]\\
&=x^2+5x+8
\end{aligned}$$

となる。

ゆえに

$y=C_1e^x+C_2xe^x+x^2+5x+8$　（C_1,C_2 は積分定数とする。）

となる。

復習問題

4. 以下に示す微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=2e^{-2x}$$

$y''-5y'+6y=2e^{-2x}$ の斉次方程式 $y''-5y'+6y=0$ の特性方程式 $\lambda^2-5\lambda+6=0$ は、

$$(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

となり、$y''-5y'+6y=0$ の基本解は、

$$y_1=e^{2x}、\quad y_2=e^{3x}$$

となり、それぞれの解を微分したものは、

$$y'_1=2e^{2x}、y'_2=3e^{3x}$$

となる。ゆえに特解は、

$$\Delta=y_1y'_2-y'_1y_2=e^{2x}\left(3e^{3x}\right)-\left(2e^{2x}\right)e^{3x}=e^{5x}$$

$$\begin{aligned}y_p&=-y_1\int\frac{f(x)y_2}{\Delta}dx+y_2\int\frac{f(x)y_1}{\Delta}dx\\&=-e^{2x}\int\frac{2e^{-2x}e^{3x}}{e^{5x}}dx+e^{3x}\int\frac{2e^{-2x}e^{2x}}{e^{5x}}dx\\&=-2e^{2x}\int e^{-4x}\,dx+2e^{3x}\int e^{-5x}\,dx\\&=\frac{5e^{-2x}}{10}-\frac{4e^{-2x}}{10}=\frac{1}{10}e^{-2x}\end{aligned}$$

となる。

ゆえに

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{10}e^{-2x}$$　（C_1,C_2 は積分定数とする。）

となる。

復習問題

5. 以下に示す微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=xe^x$$

$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=xe^x$ の斉次方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0$ の特性方程式 $\lambda^2-2\lambda+1=0$ は、

$$(\lambda-1)^2=0$$

と重根となり、$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0$ の基本解は、

$$y_1=e^x、\quad y_2=xe^x$$

となり、それぞれの解を微分したものは、

$$y'_1=e^x、y'_2=(1+x)e^x$$

となる。ゆえに特解は、

$$\Delta=y_1y'_2-y'_1y_2=e^x(1+x)e^x-e^x\,xe^x=e^{2x}$$

$$y_p=-y_1\int\frac{f(x)y_2}{\Delta}dx+y_2\int\frac{f(x)y_1}{\Delta}dx$$

$$=-e^x\int\frac{xe^xxe^x}{e^{2x}}dx+xe^x\int\frac{xe^xe^x}{e^{2x}}dx$$

$$=-e^x\cdot\frac{1}{3}x^3+xe^x\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{1}{6}x^3e^x$$

となる。

ゆえに

$$y=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{1}{6}x^3e^x$$ （C_1,C_2 は積分定数とする。）

となる。

復習問題

6. 以下に示す微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+12y=4x$$

$\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+12=4x$ の斉次方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+12y=0$ の特性方程式 $\lambda^2-7\lambda+12=0$ は、

$$(\lambda-3)(\lambda-4)=0$$

と重根となり、$\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+12y=0$ の基本解は、

$$y_1=e^{3x}、\quad y_2=e^{4x}$$

となる。

$\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+12y=4x$ の特解を $y_p=ax+b$ とすると $\frac{dy}{dx}=a$ となり、

これらを $\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+12=4x$ に代入すると、

$-7a+12(ax+b)=12ax+(12b-7a)=4x$ が成り立つためには、

$$\begin{cases} 12a=4 \\ 12b-7a=0 \end{cases}$$

を解けばよく、その解は $a=\frac{1}{3}, b=\frac{7}{36}$ となり、特解は、$y_p=\frac{x}{3}+\frac{7}{36}$

ゆえに、一般解は、

$$y=C_1e^{3x}+C_2xe^{4x}+\frac{x}{3}+\frac{7}{36}$$

ただし、C_1, C_2 は積分定数とする。

となる。

復習問題

7. 以下に示す微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+4y=\cos x$$

$y''+4y'+4y=\cos x$ の斉次方程式 $y''+4y'+4y=0$ の特性方程式 $\lambda^2+4\lambda+4=0$

$(\lambda+2)^2=0$ より

$\lambda=-2$ となり、基本解は、$y_1=e^{-2x}$,　$y_2=xe^{-2x}$　(1) となる。

$y''+4y'+4y=\cos x$ の特解を $y=A\cos x+B\sin x$ と仮定すると、

$$y'=-A\sin x+B\cos x$$
$$y''=-A\cos x-B\sin x$$

となり、これらの式を与えられた微分方程式に代入する。

$$-A\cos x-B\sin x+4(-A\sin x+B\cos x)+4(A\cos x+B\sin x)$$
$$=(-A+4B+4A)\cos x+(-B-4A+4B)\sin x=(3A+4B)\cos x+(-4A+3B)\sin x$$
$$=\cos x$$

上式が成り立つためには、

$$3A+4B=1$$
$$-4A+3B=0$$

となる。次に、この連立方程式を解くと $A=\dfrac{3}{25}$,　$B=\dfrac{4}{25}$ となるので、

$y''+4y'+4y=\cos x$ の特解は、$y=\dfrac{3}{25}\cos x+\dfrac{4}{25}\sin x$　(2) となる。

(1), (2)より、$y''+4y'+4y=\cos x$ の一般解は

$$y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}+\frac{3}{25}\cos x+\frac{4}{25}\sin x$$

ただし、C_1,　C_2 は積分定数とする。

となる。

復習問題

8. 以下に示す微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=e^{2x}$$

$y''-4y'+4y=e^{2x}$ の斉次方程式 $y''-4y'+4y=0$ の特性方程式 $\lambda^2-4\lambda+4=0$ は、

$$(\lambda-2)^2=0$$

と重根となり、$y''-4y'+4y=0$ の基本解は、

$$y_1=e^{2x}、\quad y_2=xe^{2x}$$

となり、それぞれの解を微分したものは、

$$y'_1=2e^{2x}、y'_2=(1+2x)e^{2x}$$

となる。ゆえに特解は、

$$\Delta=y_1y'_2-y'_1y_2=e^{2x}(1+2x)e^{2x}-2e^{2x}xe^{2x}=e^{4x}$$

$$\begin{aligned}y_p&=-y_1\int\frac{f(x)y_2}{\Delta}dx+y_2\int\frac{f(x)y_1}{\Delta}dx\\&=-e^{2x}\int\frac{e^{2x}xe^{2x}}{e^{4x}}dx+xe^{2x}\int\frac{e^{2x}e^{2x}}{e^{4x}}dx\\&=-e^{2x}\frac{1}{2}x^2+x^2e^{2x}=\frac{1}{2}x^2e^{2x}\end{aligned}$$

となる。

ゆえに

$$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}\qquad （C_1,C_2 は積分定数とする。）$$

となる。

復習問題

9. 以下に示す微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-5y=\cos x+\sin x$$

$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-5y=\cos x+\sin x$ の斉次方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-5y=0$ の特性方程式 $\lambda^2+4\lambda-5=0$ は、

$$(\lambda-1)(\lambda+5)=0$$

となり、$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-5y=0$ の基本解は、$y_1=e^x$、$y_2=e^{-5x}$　となる。

$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-5y=\cos x+\sin x$ の特解を $y_p=A\cos x+B\sin x$ と仮定すると、

$$y'=-A\sin x+B\cos x$$

$$y''=-A\cos x-B\sin x$$

となり、これらの式を与えられた微分方程式に代入する。

$$-A\cos x-B\sin x+4(-A\sin x+B\cos x)-5(A\cos x+B\sin x)$$
$$=(-A+4B-5A)\cos x+(-B-4A-5B)\sin x=(-6A+4B)\cos x+(-4A-6B)\sin x$$
$$=\cos x+\sin x$$

上式が成り立つためには

$$\begin{cases}-6A+4B=1\\-4A-6B=1\end{cases}$$

となる。次に、この連立方程式を解くと $A=-\frac{5}{26},\quad B=-\frac{1}{26}$ となるので、

$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-5y=\cos x+\sin x$ の特解は $y_p=-\frac{5}{26}\cos x-\frac{1}{26}\sin x$ となるので、

$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-5y=\cos x+\sin x$ の一般解は、

$$y=C_1e^x+C_2e^{-5x}-\frac{5}{26}\cos x-\frac{1}{26}\sin x$$　（C_1,C_2 は積分定数とする。）

となる。

復習問題

10. 以下に示す微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=x^2+4e^{-x}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=x^2+4e^{-x}$ の斉次方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0$ の特性方程式 $\lambda^2-2\lambda+1=0$ は、

$$(\lambda-1)^2=0$$

となり、$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0$ の基本解は、$y_1=e^x$、$y_2=xe^x$　となる。

この方程式の非斉次項は x^2 と e^{-x} の2つの部分からなるので、解の重ね合わせにより、次の2つの微分方程式の特解の和がこの方程式の特解となる。

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=x^2 \qquad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=4e^{-x} \qquad (2)$$

(1)の斉次項は2次の多項式（単項式）だから、その特解を $y_p=\alpha x^2+\beta x+\gamma$　（α,β,γ は定数）と仮定する。これを(1)に代入すると、

$$\alpha x^2+(\beta-4\alpha)x+(\gamma-2\beta+2\alpha)=x^2$$

この式の x の同じ次数の項の係数を比較して

$$\alpha=1,\ \beta=4,\ \gamma=6$$

次に式(2)において、非斉次項 e^{-x} は斉次微分方程式 $y''-2y'+y=0$ をみたさない。

よって、式(2)の特解を $y=\delta e^{-x}$（δ は定数）と仮定する。その結果

$$y''-2y'+y=4\delta e^{-x}=4e^{-x}$$

となり、$\delta=1$。以上により、与えられた方程式の特解は、

$$y_p=x^2+4x+6+e^{-x}$$

となり、一般解は、

$$y=C_1e^x+C_2xe^x+x^2+4x+6+e^{-x}$$　（C_1,C_2 は積分定数とする。）

となる。