復習問題

以下に示す微分方程式の積分因子を求め、完全形にして解け。

１．

$$\left(6y+\frac{4y^2}{x}\right)dx+\left(4y+\frac{2y^2}{x}\right)dy=0$$

２．

$$\left(\frac{3x^3}{y}+2x+3xy\right)dx+\left(\frac{2x^2}{y}+6x^2+8x\right)dy=0$$

３．

$$\left(5x+6x^2y\right)dx+\left(3x^3+4xy\right)dy=0$$

４．

$$\left(4xy+y^3\right)dx+\left(2xy^2+6y^2\right)dy=0$$

５．

$$\left(3xy\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0$$

６．

$$\left(y^3+x^2y\right)dx+\left(4x^3-6xy^2\right)dy=0$$

７．

$$y\,dx-x\,dy=0$$

８．

$$\left(y^2+\frac{5x^2}{y}\right)dx+xy\,dy=0$$

9.

$$\left(\frac{4x^2}{y}+7x\right)dx+\left(\frac{7x^2}{y}+6x\right)dy=0$$

10.

$$\left(1+y^2\right)dx+2ydy=0$$

（第 4 回　10 月 26 日）

応用数学 I 演習レポート　復習 04

1. 以下に示す微分方程式の積分因子を求め、完全微分型にして解け。

$$\left(6y+\frac{4y^2}{x}\right)dx+\left(4y+\frac{2y^2}{x}\right)dy=0$$

$$\left(6y+\frac{4y^2}{x}\right)dx+\left(4y+\frac{2y^2}{x}\right)dy=0 \qquad (1)$$

dx の係数を $P(x,y)$ 、dy の係数を $Q(x,y)$ とすると

$$Q_x-P_y=-\frac{2y^2}{x^2}-6-\frac{8y}{x} \qquad (2)$$

となり、式(1)は完全微分方程式ではない。

そこで、積分因子 $\mu=x^m y^n$ と仮定すると

$$\frac{\mu_y}{\mu}P-\frac{\mu_x}{\mu}Q=\frac{n}{y}\left(6y+\frac{4y^2}{x}\right)-\frac{m}{x}\left(4y+\frac{2y^2}{x}\right)$$

$$=6n+4(n-m)\frac{y}{x}-2m\frac{y^2}{x^2} \qquad (3)$$

式(2)と式(3)が等価であるためには、

$m=1,n=-1$ でなければならないため

積分因子　$\mu=xy^{-1}=\dfrac{x}{y}$ (4)

となり、式(1)に積分因子(4)を掛けると

$$(6x+4y)dx+(4x+2y)dy=0 \qquad (5)$$

となる。

式(5)の dx の係数を $P'(x,y)$、

dy の係数を $Q'(x,y)$ とすると

$$Q'_x-P'_y=4-4=0$$

となり、式(5)は完全微分方程式である。

ゆえに、式(5)を書き直すと

$$6xdx+4(ydx+xdy)+2ydy=0$$

$$d(3x^2)+4d(xy)+d(y^2)=0$$

両辺を積分すると

$$3x^2+4xy+y^2=C$$

となる。

ただし、C は積分定数とする。

2. 以下に示す微分方程式の積分因子を求め、完全微分型にして解け。

$$\left(\frac{3x^3}{y}+2x+3xy\right)dx+\left(\frac{2x^2}{y}+6x^2+8x\right)dy=0$$

$$\left(\frac{3x^3}{y}+2x+3xy\right)dx+\left(\frac{2x^2}{y}+6x^2+8x\right)dy=0 \qquad (1)$$

dx の係数を $P(x,y)$、dy の係数を $Q(x,y)$ とすると

$$Q_x-P_y=\frac{4x}{y}+12x+8-\frac{3x^3}{y^2}-3x \qquad (2)$$

$$=\frac{4x}{y}+9x+8-\frac{3x^3}{y^2}$$

となり、式(1)は完全微分方程式ではない。

そこで、積分因子 $\mu=x^m y^n$ と仮定すると

$$\frac{\mu_y}{\mu}P-\frac{\mu_x}{\mu}Q=\frac{n}{y}\left(\frac{3x^3}{y}+2x+3xy\right)-\frac{m}{x}\left(\frac{2x^2}{y}+6x^2+8x\right)$$

$$=3n\frac{x^3}{y^2}+2(n-m)\frac{x}{y}-3(n-2m)x-8m \qquad (3)$$

式(2)と式(3)が等価であるためには、

$m=-1, n=1$ でなければならないため

積分因子 $\mu=x^{-1}y=\dfrac{y}{x}$　(4)

となり、式(1)に積分因子(4)を掛けると

$$(3x^2+2y+3y^2)dx+(2x+6xy+8y)dy=0 \qquad (5)$$

となる。

式(5)の dx の係数を $P'(x,y)$、

dy の係数を $Q'(x,y)$ とすると

$$Q'_x-P'_y=2+6y-2-6y=0$$

となり、式(5)は完全微分方程式である。

ゆえに、式(5)を書き直すと

$$3x^2dx+2(ydx+xdy)+3(y^2dx+2xy)dy+8ydy=0$$

$$d(x^3)+2d(xy)+3d(xy^2)+d(4y^2)=0$$

両辺を積分すると

$$x^3+2xy+3xy^2+4y^2=C$$

となる。

ただし、C は積分定数とする。

3. 以下に示す微分方程式の積分因子を求め、完全微分型にして解け。

$$\left(5x+6x^2y\right)dx+\left(3x^3+4xy\right)dy=0$$

$\left(5x+6x^2y\right)dx+\left(3x^3+4xy\right)dy=0$　　(1)

dx の係数を $P(x,y)$、dy の係数を $Q(x,y)$ とすると

$$Q_x-P_y=9x^2+4y-6x^2=3x^2+4y \qquad (2)$$

となり、式(1)は完全微分方程式ではない。

そこで、積分因子 $\mu=x^my^n$ と仮定すると

$$\frac{\mu_y}{\mu}P-\frac{\mu_x}{\mu}Q=\frac{n}{y}\left(5x+6x^2y\right)-\frac{m}{x}\left(3x^3+4xy\right)$$

$$=5n\frac{x}{y}+3(2n-m)x^2-4my \qquad (3)$$

式(2)と式(3)が等価であるためには、

$m=-1,n=0$ でなければならないため

積分因子　$\mu=x^{-1}y^0=\dfrac{1}{x}$　　(4)

となり、式(1)に積分因子(4)を掛けると

$(5+6xy)dx+\left(3x^2+4y\right)dy=0$　　(5)

となる。

式(5)の dx の係数を $P'\left(x,y\right)$、

dy の係数を $Q'(x,y)$ とすると

$$Q'_x-P'_y=6x-6x=0$$

となり、式(5)は完全微分方程式である。

ゆえに、式(5)を書き直すと

$$5dx+3\left(2xydx+xdy\right)+4ydy=0$$

$$d\left(5x\right)+3d\left(x^2y\right)+d\left(2y^2\right)=0$$

両辺を積分すると

$$5x+3x^2y+2y^2=C$$

となる。

ただし、C は積分定数とする。

4. 以下に示す微分方程式の積分因子を求め、完全微分型にして解け。

$$\left(4xy+y^3\right)dx+\left(2xy^2+6y^2\right)dy=0$$

$$\left(4xy+y^3\right)dx+\left(2xy^2+6y^2\right)dy=0 \qquad (1)$$

dx の係数を $P(x,y)$ 、dy の係数を $Q(x,y)$ とすると

$$Q_x-P_y=2y^2-4x-3y^2=-y^2-4x \qquad (2)$$

となり、式(1)は完全微分方程式ではない。

そこで、積分因子 $\mu=x^m y^n$ と仮定すると

$$\frac{\mu_y}{\mu}P-\frac{\mu_x}{\mu}Q=\frac{n}{y}\left(4xy+y^3\right)-\frac{m}{x}\left(2xy^2+6y^2\right)$$

$$=4nx+(n-2m)y^2-6m\frac{y^2}{x} \qquad (3)$$

式(2)と式(3)が等価であるためには、

$m=0, n=-1$ でなければならないため

積分因子 $\mu=x^0y^{-1}=\dfrac{1}{y}$ (4)

となり、式(1)に積分因子(4)を掛けると

$$\left(4x+y^2\right)dx+\left(2xy+6y\right)dy=0 \qquad (5)$$

となる。

式(5)の dx の係数を $P'(x,y)$、

dy の係数を $Q'(x,y)$ とすると

$$Q'_x-P'_y=2y-2y=0$$

となり、式(5)は完全微分方程式である。

ゆえに、式(5)を書き直すと

$$4xdx+\left(y^2dx+2xydy\right)+6ydy=0$$

$$d\left(2x^2\right)+d\left(xy^2\right)+d\left(3y^2\right)=0$$

両辺を積分すると

$$2x^2+xy^2+3y^2=C$$

となる。

ただし、C は積分定数とする。

5. 以下に示す微分方程式の積分因子を求め、完全微分型にして解け。

$$(3xy)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0$$

$(3xy)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0$　　(1)

dx の係数を $P(x,y)$ 、dy の係数を $Q(x,y)$ とすると

$Q_x-P_y=2x-3x=-x$　　(2)

となり、式(1)は完全微分方程式ではない。

そこで、積分因子 $\mu=x^m y^n$ と仮定すると

$$\frac{\mu_y}{\mu}P-\frac{\mu_x}{\mu}Q=\frac{n}{y}(3xy)-\frac{m}{x}\left(x^2+y^2\right)$$

$=3nx+m(x+\frac{y^2}{x})$　　(3)

式(2)と式(3)が等価であるためには、

$m=0, n=-\dfrac{1}{3}$ でなければならないため

積分因子　$\mu=x^0 y^{-\frac{1}{3}}=y^{-\frac{1}{3}}$　(4)

となり、式(1)に積分因子(4)を掛けると

$\left(3xy^{2/3}\right)dx+\left(\dfrac{x^2}{y^{1/3}}+y^{5/3}\right)dy=0$　　(5)

となる。

式(5)の dx の係数を $P'(x,y)$、

dy の係数を $Q'(x,y)$ とすると

$$Q'_x-P'_y=2\frac{x}{y^{1/3}}-2\frac{x}{y^{1/3}}=0$$

となり、式(5)は完全微分方程式である。

ゆえに、式(5)を書き直すと

$$\left(3xy^{2/3}dx+\frac{x^2}{y^{1/3}}dy\right)+y^{5/3}dy=0$$

$$d\left(\frac{3}{2}x^2y^{2/3}\right)+d\left(\frac{3}{8}y^{8/3}\right)=0$$

$$d(4x^2y^{2/3})+d\left(y^{8/3}\right)=0$$

両辺を積分すると

$$4x^2y^{2/3}+y^{8/3}=C$$

となる。

ただし、C は積分定数とする。

6. 以下に示す微分方程式の積分因子を求め、完全微分型にして解け。

$$\left(y^3+x^2y\right)dx+\left(4x^3-6xy^2\right)dy=0$$

$\left(y^3+x^2y\right)dx+\left(4x^3-6xy^2\right)dy=0$　　(1)

dx の係数を $P(x,y)$、dy の係数を $Q(x,y)$ とすると

$$\begin{aligned}Q_x-P_y&=12x^2-6y^2-3y^2-x^2\\&=11x^2-9y^2\end{aligned}\qquad(2)$$

となり、式(1)は完全微分方程式ではない。

そこで、積分因子 $\mu=x^my^n$ と仮定すると

$$\frac{\mu_y}{\mu}P-\frac{\mu_x}{\mu}Q=\frac{n}{y}\left(y^2+x^2y\right)-\frac{m}{x}\left(4x^3-6xy^2\right)$$

$=(n-4m)x^2+(n+6m)y^2$　　(3)

式(2)と式(3)が等価であるためには、

$m=-2,n=3$ でなければならないため

積分因子　$\mu=x^{-2}y^3=\dfrac{y^3}{x^2}$　(4)

となり、式(1)に積分因子(4)を掛けると

$$\left(\frac{y^6}{x^2}+y^4\right)dx+\left(4xy^3-\frac{6y^5}{x}\right)dy=0\qquad(5)$$

となる。

式(5)の dx の係数を $P'(x,y)$、

dy の係数を $Q'(x,y)$ とすると

$$Q'_x-P'_y=4y^3+\frac{6y^5}{x^2}-\frac{6y^5}{x^2}-4y^3=0$$

となり、式(5)は完全微分方程式である。

ゆえに、式(5)を書き直すと

$$\left(y^4dx-4xy^3dy\right)+\left(\frac{y^6}{x^2}dx-\frac{6y^5}{x}dy\right)=0$$

$$d(xy^4)+d(-\frac{y^6}{x})=0$$

両辺を積分すると

$$xy^4-\frac{y^6}{x}=C$$

となる。

ただし、C は積分定数とする。

7. 以下に示す微分方程式の積分因子を求め、完全微分型にして解け。

$$y\,dx - x\,dy = 0$$

$ydx - x\,dy = 0$　　(1)

dx の係数を $P(x,y)$、dy の係数を $Q(x,y)$ とすると

$Q_x - P_y = -1 - 1 = -2$　　(2)

となり、式(1)は完全微分方程式ではない。

そこで、積分因子 $\mu = x^m y^n$ と仮定すると

$\dfrac{\mu_y}{\mu}P - \dfrac{\mu_x}{\mu}Q = \dfrac{n}{y}(y) - \dfrac{m}{x}(-x)$

$= n + m$　(3)

式(2)と式(3)が等価であるための最も簡単な値は、

$m = -2, n = 0$ なので

積分因子　$\mu = x^{-2}y^0 = \dfrac{1}{x^2}$　(4)

となり、式(1)に積分因子(4)を掛けると

$\left(\dfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(-\dfrac{1}{x}\right)dy = 0$　　(5)

となる。

式(5)の dx の係数を $P'(x,y)$、

dy の係数を $Q'(x,y)$ とすると

$$Q'_x - P'_y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0$$

となり、式(5)は完全微分方程式である。

ゆえに、式(5)を書き直すと

$$d\left(-\frac{y}{x}\right) = 0$$

両辺を積分すると

$$-\frac{y}{x} = C$$

となる。

ただし、C は積分定数とする。

応用数学 I 演習　復習 04

【別解】

$$ydx - x\,dy = 0 \qquad (1)$$

dx の係数を $P(x, y)$ 、dy の係数を $Q(x, y)$ とすると

$$Q_x - P_y = -1 - 1 = -2 \qquad (2)$$

となり、式(1)は完全微分方程式ではない。

そこで、積分因子 $\mu = x^m y^n$ と仮定すると

$$\frac{\mu_y}{\mu}P - \frac{\mu_x}{\mu}Q = \frac{n}{y}(y) - \frac{m}{x}(-x)$$

$$= n + m \qquad (3)$$

式(2)と式(3)が等価であるための最も簡単な値は、

$m = 0, n = -2$ なので

積分因子　$\mu = x^0 y^{-2} = \dfrac{1}{y^2}$　(4)

となり、式(1)に積分因子(4)を掛けると

$$\left(\frac{1}{y}\right)dx + \left(-\frac{x}{y^2}\right)dy = 0 \qquad (5)$$

となる。

式(5)の dx の係数を $P'(x, y)$、

dy の係数を $Q'(x, y)$ とすると

$$Q'_x - P'_y = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2} = 0$$

となり、式(5)は完全微分方程式である。

ゆえに、式(5)を書き直すと

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

両辺を積分すると

$$\frac{x}{y} = C$$

となる。

ただし、C は積分定数とする。

8. 以下に示す微分方程式の積分因子を求め、完全微分型にして解け。

$$\left(y^2+\frac{5x^2}{y}\right)dx+xy\,dy=0$$

$$\left(y^2+\frac{5x^2}{y}\right)dx+xydy=0 \quad (1)$$

dx の係数を $P(x,y)$、dy の係数を $Q(x,y)$ とすると

$$Q_x-P_y=y-2y+5\frac{x^2}{y^2}=-y+5\frac{x^2}{y^2} \quad (2)$$

となり、式(1)は完全微分方程式ではない。

そこで、積分因子 $\mu=x^m y^n$ と仮定すると

$$\frac{\mu_y}{\mu}P-\frac{\mu_x}{\mu}Q=\frac{n}{y}\left(y^2+\frac{5x^2}{y}\right)-\frac{m}{x}(xy)$$

$$=(n-m)y+5n\frac{x^2}{y^2} \quad (3)$$

式(2)と式(3)が等価であるためには、

$m=2, n=1$ でなければならないため

積分因子　$\mu=x^2y$　(4)

となり、式(1)に積分因子(4)を掛けると

$$\left(x^2y^3+5x^4\right)dx+x^3y^2\,dy=0 \quad (5)$$

となる。

式(5)の dx の係数を $P'(x,y)$、

dy の係数を $Q'(x,y)$ とすると

$$Q'_x-P'_y=3x^2y^2-3x^2y^2=0$$

となり、式(5)は完全微分方程式である。

ゆえに、式(5)を書き直すと

$$d\left(x^5\right)+\left(x^2y^3dx+x^3y^2dy\right)=0$$

$$d\left(x^5\right)+d\left(\frac{1}{3}x^3y^3\right)=0$$

$$d\left(3x^5\right)+d\left(x^3y^3\right)=0$$

両辺を積分すると

$$3x^5+x^3y^3=C$$

となる。

ただし、C は積分定数とする。

9. 以下に示す微分方程式の積分因子を求め、完全微分型にして解け。

$$\left(\frac{4x^2}{y}+7x\right)dx+\left(\frac{7x^2}{y}+6x\right)dy=0$$

$$\left(\frac{4x^2}{y}+7x\right)dx+\left(\frac{7x^2}{y}+6x\right)dy=0 \quad (1)$$

dx の係数を $P(x,y)$ 、dy の係数を $Q(x,y)$ とすると

$$Q_x-P_y=\frac{14x}{y}+6+\frac{4x^2}{y^2} \quad (2)$$

となり、式(1)は完全微分方程式ではない。

そこで、積分因子 $\mu=x^m y^n$ と仮定すると

$$\frac{\mu_y}{\mu}P-\frac{\mu_x}{\mu}Q=\frac{n}{y}\left(\frac{4x^2}{y}+7x\right)-\frac{m}{x}\left(\frac{7x^2}{y}+6x\right)$$

$$=7(n-m)\frac{x}{y}+4n\frac{x^2}{y^2}-6m \quad (3)$$

式(2)と式(3)が等価であるためには、
$m=-1, n=1$ でなければならないため

積分因子　$\mu=x^{-1}y=\dfrac{y}{x}$ (4)

となり、式(1)に積分因子(4)を掛けると

$$(4x+7y)dx+(7x+6y)dy=0 \quad (5)$$

となる。

式(5)の dx の係数を $P'(x,y)$、
dy の係数を $Q'(x,y)$ とすると

$$Q'_x-P'_y=7-7=0$$

となり、式(5)は完全微分方程式である。

ゆえに、式(5)を書き直すと

$$4xdx+7(ydx+xdy)+6ydy=0$$

$$d(2x^2)+7d(xy)+d(3y^2)=0$$

両辺を積分すると

$$2x^2+7xy+3y^2=C$$

となる。
ただし、C は積分定数とする。

10. 以下に示す微分方程式の積分因子を求め、完全微分型にして解け。

$$\left(1+y^2\right)dx+2ydy=0$$

$(1+y^2)dx+(2y)dy=0$ (1)

dx の係数を $P(x,y)$、dy の係数を $Q(x,y)$ とすると

$$Q_x-P_y=-2y=-Q \qquad (2)$$

となり、式(1)は完全微分方程式ではない。

式(2)より、

$$Q_x-P_y=-2y=\frac{\mu_y}{\mu}P-\frac{\mu_x}{\mu}Q=-\frac{\mu_x}{\mu}Q=-Q$$

が成り立つためには

$$\frac{\mu_x}{\mu}=1,\quad \frac{\mu_y}{\mu}=0$$

ゆえに、

$$\frac{\mu_x}{\mu}=1$$

より、μを x のみの関数と仮定し、

両辺を積分すると

$$\log|\mu|=x+C'$$

$$\mu=Ce^x$$

C’は積分定数で、$C=e^{C'}$として、

ある任意のμを選び出すと

$$\mu=e^x \qquad (3)$$

となり、

となり、式(1)に積分因子(3)を掛けると

$$\left(1+y^2\right)e^x\,dx+2ye^x\,dy=0 \qquad (4)$$

となる。

式(4)の dx の係数を $P'(x,y)$、

dy の係数を $Q'(x,y)$ とすると

$$Q'_x-P'_y=2ye^x-2ye^x=0$$

となり、式(4)は完全微分方程式である。

ゆえに、式(4)を書き直すと

$$e^xdx+\left(y^2e^xdx+2ye^xdy\right)=0$$

$$d\left(e^x\right)+d\left(y^2e^x\right)=0$$

両辺を積分すると

$$\left(1+y^2\right)e^x=C$$

となる。

ただし、C は積分定数とする。