復習問題

1. 放射性炭素による年代測定法は、20 世紀初頭にイギリスの物理学者ラザフォードと他の何人かによって発見・開発された放射性物質の崩壊の原理に基づくものである。その原理とは、「放射性物質（の原子数）」は放射線を出しながら減っていく」というものである。

(1)　$N = N(t)$を時刻　t　における放射性物質中の原子の個数とするとき、ラザフォードは「崩壊率（単位時間に減る原子数）は現在の原子数を比例する」ことを示した。このことを微分方程式で表せ。ただし、比例定数は α(α >0)とする。

(2)　$t = 0$ における N の値を N_0 とする。このとき、(1)で求めた微分方程式を解け。

(3)　はじめ、N_0 だけであった原子の個数が半分になるまでの期間 τ を半減期という。
　このとき、$\tau = \dfrac{1}{\alpha}\log 2$ が成り立つことを示せ。

2. 時刻 t における人口を $N = N(t)$ とする。イギリスの経済学者マルサスが 1798 年に発表した人口論によると、時刻 t から時刻 $t = \Delta t$ の間の人口の増分 $\Delta N = N(t+\Delta t) - N(t)$ は、$N, \Delta t$ に比例するという。このとき、次の問に答えよ。

(1) 比例定数を k ($k > 0$) として、マルサスの人口論による微分方程式を求めよ【5 点】。

(2) ある村の 1900 年における人口は 500 人、1910 年の人口は 600 人であった。1900 年を $t = 0$, 1910 年を $t = 1$ とするとき、マルサスの人口論による 1920 年の村の人口を(1)で求めた微分方程式を解くことにより予測せよ。

3. ある池に生息する微生物の数を $y(t)$ とし、時刻 t における微生物の変化率は、その時刻での微生物の数に比例する。この時、次の問に答えよ。

(1) 池の外から進入する微生物の数が時刻 t とともに$\cos(t)$ に従い増減するとき、池を出入りする微生物の数を考慮した y が満たすべき微分方程式は、1階微分方程式となることを示せ。ただし、比例定数を3とする。

(2) (1)の微分方程式を解き、微生物の数の時間変化を求めよ。時刻 t=0 の時、微生物の数 y は0個とする。

４． ニュートンの冷却法則によれば、「大気中におかれた物体が冷却する速度は、その物体の温度と外気温との差に比例する」このとき、次の問に答えよ。

(1) 時刻 t [分]の時のコーヒーの温度を x [℃]、外気温を C_T [℃]とするとき、ニュートンの冷却法則に基づき $x(t)$に関する微分方程式を導け。ただし、C_T は定数とし、k を微分方程式の比例定数とする。ただし、$k>0$ とする。

(2) 最初、コーヒーの温度は 82℃であり、10 分後の温度は 52℃であった。このとき、20 分後のコーヒーの温度は何度になると予想されるか？ただし、外気温は 22℃とする。

応用数学Ｉ演習　復習 03

1.

(1) 単位時間に減る原子数は現在の原子数に比例することから

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\alpha N(t)$$

(2) (1)の微分方程式を解くと、

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\alpha N(t)$$

$$\frac{1}{N(t)} dN(t) = -\alpha\, dt$$

両辺を積分して

$$\log|N(t)| - \alpha t + C$$ C は積分定数とする。

この式を変形して

$$N(t) = e^{C} e^{-\alpha t}$$

$t = 0$ における N の値を N_0 とすることより。

$$N(0) = e^{C} = N_0$$

ゆえに

$$N(t) = N_0 e^{-\alpha t}$$

となる。

(3)

N_0の半分になる期間が τ なので、(2)の解より

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\alpha\tau}$$

となり、両辺を N_o で割ると

$$\frac{1}{2} = e^{-\alpha\tau}$$

両辺の対数をとると

$$-\alpha\tau = \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\tau = -\frac{1}{\alpha}\log\left(\frac{1}{2}\right)$$

さらに、式を変形すると

$$\tau = \frac{1}{\alpha}\log 2$$

原子の個数が半分になる半減期を示す式になる。

応用数学Ｉ演習　復習 03

2.

(1)

マルサスの人口論では、口の増分$\Delta N = N(t+\Delta t) - N(t)$は、$N, \Delta t$ に比例しているため、
比例定数を k ($k > 0$) とすると

$$\Delta N = kN\,\Delta t$$

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = kN$$

であり、$\Delta t \to 0$ とすると微分方程式

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

を得る。

(2)

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

$$\frac{dN}{N} = k\,dt$$

両辺を積分すると

$$\log|N| = kt + C'$$ （C'を積分定数とする。）

$$N = Ce^{kt}$$ （$C = e^{C'}$ とする。）　(1)

(1)において、$t = 0$ とすると

$$N = Ce^{k\cdot 0} = C = 500$$

つぎに、$t = 1$ とすると

$$N = 500\,e^{k} = 600$$

ゆえに、$e^{k} = 1.2$

1900 年を$t = 0$ とし、1920 年を$t = 1$ とすると、1940 年を$t = 2$ であるので

$$N = Ce^{2k} = C\left(e^{k}\right)^{2} = 500(1.2)^{2} = 720$$

となり、1940 年の人口は、720 人となる。

応用数学Ⅰ演習　復習 03

3.

(1) 池の出入りを考えない場合には、ある池に微生物の変化率 y'は微生物の数 y に依存し、比例定数が３であることから

$$y' = 3y$$

となり、池の出入りは時刻 t とともに $\cos(t)$ に従い増減しているため、微生物の数の変化率は

$$y' = 3y + \cos t$$

となる。

(2) まず、(1)の微分方程式を解く。

$$y' = 3y + \cos t$$

$$y' - 3y = \cos t \qquad \text{(a)}$$

上式の斉次方程式は

$$y' - 3y = 0$$

$$y' = 3y$$

$$\frac{1}{y}dy = 3dt$$

両辺を積分すると

$$\log|y| = 3t + C'$$

ゆえに $y = C''e^{3t}$ となるので、$y = f(t)e^{3t}$ (b)

となり、$y' = f'(t)e^{3t} + 3f(t)e^{3t}$ (c)

式(a)に式(b),(c)を代入すると

$$f'(t)e^{3x} + 3f(t)e^{3t} - 3f(t)e^{3t} = \cos t$$

$$f'(t)e^{3t} = \cos t$$

$$f'(t) = e^{-3t}\cos t$$

両辺を積分すると

$$f(t) = \frac{e^{-3t}}{10}\left(-3\cos t + \sin t\right) + C \qquad \text{(d)}$$

となる。ただし、C を積分定数とする。

式(d)を式(b)に代入すると

応用数学Ｉ演習　復習 03

$$y=\frac{1}{10}\left(-3\cos t+\sin t\right)+Ce^{3t} \qquad \text{(e)}$$

となる。

t=0 の時　式(e)の時　y=0 より

$$0=\frac{1}{10}\left(-3\cos 0+\sin 0\right)+Ce^{3\cdot 0}$$

$$C=\frac{3}{10}$$

ゆえに

$$y=\frac{1}{10}\left(-3\cos t+\sin t\right)+\frac{3}{10}e^{3t}$$

となる。

応用数学Ⅰ演習　復習 03

4.

(1)

物体の温度 x と外気温 C_T との差$(x-C_T)$に比例するため、k が微分方程式の比例定数より $x(t)$ に関する微分方程式は $\dfrac{dx}{dt}=-k\left(x-C_T\right)$ となる。

(2)

式(1)の微分方程式の両辺を $x-C_T$
で割ると

$$\frac{dx}{x-C_T}=-kdt$$

両辺を 0 から t まで定積分を行うと

$$\int_{x(o)}^{x(t)}\frac{dx}{x-C_T}=\int_0^t-kdt$$

$$\log\left|x(t)-C_T\right|-\log\left|x(0)-C_T\right|=-kt$$

$$\log\frac{\left|x(t)-C_T\right|}{\left|x(0)-C_T\right|}=-kt$$

$$\frac{x(t)-C_T}{x(0)-C_T}=e^{-kt}$$

$$x(t)-C_T=\left\{x(0)-C_T\right\}e^{-kt} \qquad (1)$$

最初、コーヒーの温度は 82℃、外気温は 22℃より

$x(t)-22=\{82-22\}e^{-k\cdot 0}=60$

10 分後の温度は 52℃より

$x(10)-22=52-22=30=60e^{-10k}$

$$e^{-10k}=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$$

であり、式(1)より 20 分後の温度は

$$x(20)-22=60e^{-20k}=60\left(e^{-10k}\right)^2$$

$$=60\left(\frac{1}{2}\right)^2=60\frac{1}{4}=15$$

$$x(20)=15+22=37$$

となる。

ゆえに、20 分後のコーヒーの温度は 37℃になる。