復習問題

**1.** **以下の関数が発散するか、収束するかを判定せよ。解答は途中経過も必ず書くこと。**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

**2.** **以下の関数が発散するか、収束するかを判定せよ。解答は途中経過も必ず書くこと。**

**(1)** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$$

**(2)** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

**3.** **コーシー・アダマールの定理を用いて、第n項が次式で与えられるベキ級数の収束半径を求めよ。解答は途中経過も必ず書くこと。**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(3^n - 1\right) z^n$$

**4.** **ダランベル定理を用いて、第 n 項が次式で与えられるベキ級数の収束半径を求めよ。解答は途中経過も必ず書くこと。**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) x^n$$

応用数学Ｉ演習復習問題

## 1.

ダランベールの比判定法を用いると

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2^{n+1}+1} \times \frac{2^n+1}{1} = \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = \frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}}\right) = \frac{1}{2}$$

であるから、この級数は収束する。

## 2.

(1)

タランベールの比判定法を用いると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

となり、収束する。

(2)

タランベールの比判定法を用いると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1} = 0$$

となり、収束する。

応用数学Ⅰ演習復習問題

## 3.

コーシー･アダマールの定理を用いると

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n-1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}=3\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{3^n}}=3$$

となり、ゆえに、収束半径 R=1/2 となる。

## 4.

ダランベルの定理を用いると

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}\right|=\frac{2}{2}=1$$

となり、ゆえに、収束半径 R=1 となる。